

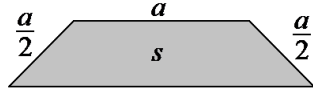
אולימפיאדה שלישית ע"ש בנו ארבל ז"ל - כיתות ט'

יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תתקבל.
אין להשתמש במחשבון.

1. משולש נקרא טוב אם הוא שווה שוקיים וכל צלעותיו בעלות אורך שלם. יעל מצירת משולשים טובים בעלי היקף 2015, שאף שניים מהם לא חופפים. יוסי מציר משולשים טובים בעלי היקף 2016, שאף שניים מהם לא חופפים. מי יוכל לצייר יותר משולשים: יוסי או יעל?

2. המספרים הממשיים x ו- y מקיימים את המשוואות $x^3 + y^3 = 9$ ו- $x^2y + y^2x = 6$. חשבו את $x + y$.

3. נתון טרפז שווה-שוקיים, שהזוויות שלו ליד הבסיס הגדול שוות 45° , אורכי השוקיים $\frac{a}{2}$ ואורך הבסיס הקטן הוא a .



שטח הטרפז יסומן s . הוכיחו ששטחו של המתומן המשוכלל שכל צלע שלו שווה ל- a הוא $a^2 + 8s$.

4. פתרו את המשוואה $\sqrt{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{\frac{3-x}{2}} = \frac{x^2+9}{6x}$.

5. מצאו את כל הזוגות (a, b) של מספרים שלמים שונים זה מזה, כך ש- $17(a-b)^2$ מתחלק ב- $a \cdot b$.

6. נתונה רשימה שמורכבת מ- N מספרים שלמים חיוביים, שכולם קטנים או שווים ל-100. אין אף זוג מספרים ברשימה שהסכום שלהם שווה למספר אחר ברשימה. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי עבור N ?

7. במרובע ABCD נתון: $\angle CAB = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle BCD = 30^\circ$, $AC = 2015$. מצאו את היקף המשולש BAD.

8. נתון ששלושה מספרים ממשיים $a, b, c \geq 0$ מקיימים $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^4 + b^4 + c^4$. הוכיחו כי $a^3 + b^3 + 2c^3 \leq 4$.

בהצלחה!