אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע״ש פרופ׳ גיליס 1984

1. הוכח כי למשוואה

$$6^x = y^2 + y - 2$$

אין פתרון במספרים שלמים.

2. אם m, n הם מספרים שלמים וחיוביים, c מספר לא רציונלי ו-$d = 1/c$, הוכח כי

$$\sum_{j=0}^{[m+nc]} [(n+1) + (m-j)d] = \sum_{j=0}^{[n+md]} [(m+1) + (n-j)c]$$

(הסימן $[x]$ מציין את החלק השלם של x. לדוגמא: $[2.7] = 2$, $[1.9] = 1$, $[1.0] = 1$).

3. הנקודות X, A, B, C, D נמצאות על קו ישר l. H היא נקודה כלשהי מחוץ ל-l ו-K נקודה שניה כלשהי על הישר XH. הישרים HA, KB נפגשים ב-P. הישרים KD ו-HC נפגשים ב-Q. הקו הישר PQ נפגש עם l ב-Y. הוכח כי מקומה של Y על l תלוי אך ורק ב-X, A, B, C, D ולא במקומן של H, K.

4. הוכח כי עבור כל n טבעי גדול מ-1, המספר

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$$

אינו רציונלי.

5. לגבי הזויות x, y, z ידוע כי

$$x + y + z = 2\pi,$$
$$\cos x \cos y \cos z = \frac{1}{4}.$$

הוכח כי

$$4\cos 3x \cos 3y \cos 3z - 12\cos 2x \cos 2y \cos 2z = 1. \tag{1.1}$$

6. עבור אילו ערכים ממשיים של a יש למשוואה

$$a^2\left|a + \frac{x}{a^2}\right| + |1 + x| = 1 - a^3$$

יותר משלושה פתרונות שהם מספרים שלמים?

7. נתונה פירמידה $MABC$ אשר בה המקצועות MA, MB, MC מאונכים זה לזה. S_1, S_2, S_3 הם שטחי הפיאות MBC, MCA, MAB בהתאמה ו-h הוא אורך הגובה מ-M לבסיס ABC, הוכח כי

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{9h^2}{2}.$$

8. מצא מספר טבעי k כך שכל הפתרונות של המשוואה

$$(2\sqrt{2}\cos 25^\circ - 1)\tan x^\circ = (2\sqrt{2}\sin 25^\circ - 1)\tan kx^\circ$$

(במעלות) יהיו מספרים שלמים.

9. נסמן ב-$\sigma(n)$ את סכום המחלקים של מספר טבעי n

(דוגמא: מחלקי 12 הם 1, 2, 3, 4, 6, 12 ולכן $\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$).

הוכח כי קיימים אינסוף מספרים n עבורם $\sigma(n!) > 3n!$.

10. נתונה קבוצה A של 21 מספרים טבעיים, כולם שונים זה מזה וקטנים מ-65, כלומר

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{20} < a_{21} \leq 64$$

B היא קבוצת כל ההפרשים האפשריים $a_j - a_i$ $(1 \leq i < j \leq 21)$.

הוכח כי לפחות אחד מהמספרים 5, 6, 11 נמצא בקבוצה B.