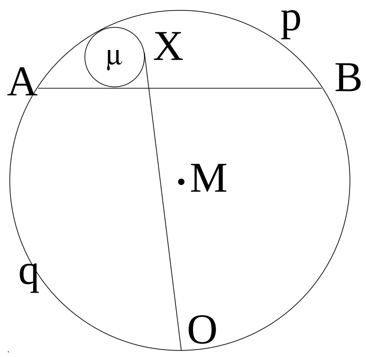
אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1985

1. המיתר AB מחלק את המעגל M לשתי קשתות p, q. הנקודה O היא הנקודה על q הרחוקה ביותר מהמיתר AB. μ הוא מעגל כלשהו בפנים המעגל M המשיק מבפנים לקשת p ומשיק לישר AB (ראה ציור). הוכח כי המשיק מ-O ל-μ שווה ל-OA.



2. נתונים n מספרים חיוביים p_i ו-n מספרים חיוביים q_i המקיימים

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

בהסתמך על אי השוויון $x \ln x \geq x - 1$ עבור כל $x > 0$ (או בכל דרך אחרת) הוכח כי

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i > \sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i.$$

3. פתור את המשוואה

$$\left[4x - \frac{1}{5}\right] - 3x + 4 = 0.$$

(הערה: עבור כל מספר ממשי a מסמן $[a]$ את החלק השלם של a, כלומר המספר השלם t המקיים $t \leq a < t + 1$). כמה פתרונות ישנם?

4. לכל מספר טבעי n נגדיר $f(n)$ כמספר האפסים בסוף המספר $n!$ (דוגמה: $7! = 5040$ ולכן $f(7) = 1$; $10! = 3,628,800$ ולכן $f(10) = 2$).

א. הוכח כי

$$f(5745) - f(1985) = f(5745 - 1985).$$

ב. האם לכל שני מספרים טבעיים x, y $(x > y)$, מתקיים $f(x) - f(y) = f(x - y)$?
נמק את תשובתך.

5. נתונה המשוואה

$$(\sin x)^{\sqrt{3x-1}} + 2(\cos 2x)^{\sqrt{-9x^2-3x+2}} - \log_{\frac{1}{x}} x^3 = a.$$

מהם הערכים האפשריים של a כך שלמשוואה זו יהיה לפחות פתרון ממשי אחד?

6. על לוח שחמט בעל 64 משבצות מעמידים 32 כלים לבנים ו-32 כלים שחורים. שני כלים מהווים "זוג חריג" אם הם בעלי צבעים שונים ונמצאים באותה השורה או באותו הטור (מובן כי כלי אחד יכול להשתתף בכמה זוגות חריגים). נסמן ב-N את מספר הזוגות החריגים.
הוכח כי $N \leq 256$. האם יתכן שוויון? אם כן - מצא באילו תנאים. אם לא - הוכח מדוע לא.

7. משולש M יקרא "מיוחד" אם ניתן להתאים לו משולש שני N כך שיתקיים

א. M ו-N דומים אבל אינם חופפים.

ב. שתי צלעות של N שוות לשתי צלעות של M.

מהם התנאים המאפיינים את קבוצת כל המשולשים המיוחדים?

8. נתונים שני מספרים טבעיים A, B כך ש-$B < A$. הוכח כי בכל קבוצה של B מספרים טבעיים עוקבים ניתן למצוא שני מספרים שמכפלתם מתחלקת ב-AB.

9. a, b, c הם אורכי הצלעות של משולש. הוכח כי

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

10. המספרים הטבעיים $a_1, a_2 \dots a_n$ מקיימים

$$N \geq a_1 > a_2 > \cdots > a_n \geq 1.$$

כמו כן נתון כי הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של כל זוג a_i, a_j אינה גדולה מ-N.
הוכח כי לכל i, $a_i \leq \frac{N}{i}$.