אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1988

1. הוכח שאין מספר שלם כך שכאשר מעבירים את הספרה הראשונה שלו משמאלו לימינו מקבלים מספר שהוא גדול פי ארבעה מהמספר המקורי.

2. מצא את כל הפתרונות של המשוואה

$$\left[\frac{\alpha^2 x + \alpha^2 - 1}{2}\right] = \frac{2x+3}{5}$$

כאשר α מספר שלם ו-x ממשי. (עבור כל t ממשי מסמן $[t]$ את המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ-t. לדוגמה: $[2.01] = [2.9] = 2$, $[-1.5] = -2$).

3. מצא את כל הזוגות (x, y) של מספרים שלמים שונים מ-0 המקיימים

$$(x^2+y)(x+y^2) = (x-y)^3.$$

4. המשולש ABC מסתובב במישור שלו סביב לקודקוד A. בכל מצב של המשולש המסתובב, נגיד $AB'C'$, מגדירים M כנקודת מפגש של הישרים BB', CC'.

א. מהו המקום ההנדסי של M?

ב. איפה נמצא M במסלול הזה אחרי שהמשולש הסתובב ב-$90°$?

5. מפתחים את שתי הפונקציות

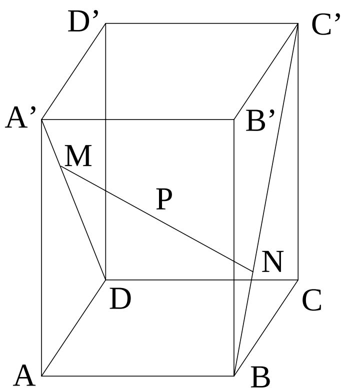
$$f_1(x) = (1 - x^{19} + x^{88})^{1988},$$
$$f_2(x) = (1 - x^{19} - x^{88})^{1988},$$

לצורת פולינום. באיזה משני הפולינומים יהיה המקדם של x^{5748} יותר גדול? נמק.

6. הוכח כי אם $x = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$, אזי

$$\sum_{j=2}^{n} \sec(jx)\sec(j-2)x = 3\cos 2x \csc^2 2x.$$

7. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראה ציור). M היא נקודה כלשהי על האלכסון $A'D$ של הפיאה $ADD'A'$ ו-N היא נקודה כלשהי על האלכסון BC' של הפיאה $BCC'B'$; P הוא אמצע הקטע MN. מצא את המקום ההנדסי של P.



8. קבוצת אנשים בקרה בתערוכה של 200 ציורים. אף מבקר לא ראה את כל הציורים אבל מאידך לא היה אף ציור אשר אף מבקר לא הסתכל בו. הוכח כי היו לפחות זוג אחד של מבקרים, שנסמנם A ו-B, וזוג אחד של ציורים, שנסמנם α ו-β, כך ש-A ראה את α ולא את β בעוד B ראה את β ולא את α.