

אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1990

1. מצא את כל הפתרונות המשיים של המשוואה

$$(5750 - 50x)^4 + (1990 - 10x)^4 = (40x - 3760)^4.$$

2. הוכח כי לא ניתן מצלע קמור בעל יותר משלוש זיוות חדות.

3. מהם הערכים האפשריים של  $k$  אם נתנו כי כל ארבעת הפתרונות של המשוואה

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = k$$

הם שלמים?

4. בעיגול בעל רדיוס  $R$  נמצאות  $n > 1$  נקודות. הוכח כי קיימים לפחות זוג אחד מבין הנקודות האלה שהמרחק ביניהן קטן מ-  $\frac{2R}{\sqrt{n} - 1}$ .

5. הוכח כי אי אפשר למצוא מספרים ממשיים  $z, y, x$  המקיימים

$$\cos(y - z) + \cos(z - x) + \cos(x - y) + 2 = 0.$$

6. הוכח כי עבור כל  $n$  טבעי ניתן למצוא קבוצה של  $n$  נקודות במשורר, לא כולן על קו ישר אחד, אשר המרחק בין כל שתיים מהן הוא מספר שלם.

7. במשולש שכל זיוותו חדות, חסום רביע. הוכח כי מרכז המעגל החסום במשולש נמצא בפנים הרביע.

8. נתון כי  $c, a, b$  הם מספרים חיוביים המקיימים  $a + b + c = \sqrt{3}/2$

מצא את השלשות  $z, y, x$  של מספרים חיוביים כך שמתקיים

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = 11.3 \quad (1)$$