אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1993

1. המספר הממשי a מקיים $a \neq 1$, $a > 0$. m הוא מספר ממשי כלשהו. פתור את המשוואה

$$\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x} = \log_a \left(\frac{m}{x} + 1\right).$$

האם קיים תמיד פתרון? נמק.

2. הוכח כי עבור a, b, c חיוביים כלשהם קיים

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. הוכח כי אין מספרים טבעיים x, y המקיימים

$$x^3 + y^3 = 5753^2.$$

4. במשולש ABC, $AB < AC$. הנקודות X, Y נמצאות על AB, BC בהתאמה כך ש-$AX = BY$. הוכח כי $XY > \frac{1}{2}AC$.

הערה: השאלה כפי שנוסחה אינה נכונה. במקום פתרון תן דוגמה נגדית.

5. חלץ את x, y מהמערכת

$$\begin{aligned} &\sin x + \sin y = 2a, \\ &\cos x + \cos y = 2b, \\ &a, b > 0, \end{aligned}$$

כאשר $0 \leq x, y \leq 2\pi$.

6. מצא את המספרים הטבעיים $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1993$$

ואילו $\prod_{i=1}^{n} a_i$ יהיה מירבי.

7. נתונה תיבה רבועית ישרה עם צלע הבסיס $2a$ וגובה $a(1+\sqrt{3})$. בסיס אחד של התיבה חסום בכדור והבסיס השני משיק לאותו כדור. מצא את רדיוס הכדור וגם את השטח של אותו חלק מהתיבה הנמצא בפנים הכדור.