

אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1996

1. a מספר ראשוני כלשהו ו- n מספר טבעי גדול מ-2. מצא את כל הפתרונות השלמים של

$$x^n + ay^n = a^2 z^n$$

2. מצא את כל הפולינומים $P(x)$ כך שלכל x מתקיים

$$P(x+1) - 2P(x) - P(x-1) = x.$$

3. ABC הוא משולש חד זווית שצלעותיו a, b, c וזוויותיו α, β, γ .

נסמן ב- AD את הגובה מ- A על BC , ב- CF את התיכון מ- C וב- BE את חוצה הזווית B .

הוכח כי תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- AD, CF, BE יעברו בנקודה אחת הוא

$$\cos \gamma \tan \beta = \sin \alpha.$$

4. למלון מגיעים 8 אורחים ויש לשכנם ב-4 חדרים, כך שאף חדר לא יהיה ריק. לכל אורח יש

לכל היותר 3 אורחים אחרים עמם אינו מוכן לחלוק חדר. הנח כי אם אורח A אינו מוכן לגור

עם אורח B אז גם אורח B אינו מוכן לגור עם אורח A . הוכח כי יש דרך לשכן את האורחים

במלון (לשביעות רצונם) כך שבכל חדר יהיו בדיוק שני אורחים.

5. נתון משולש ABC ובו $2r = R$, כאשר r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש ו- R הוא

רדיוס המעגל החוסם אותו. הוכח כי המשולש הוא שווה צלעות.

6. נתון $|x|, |y|, |z| \geq 2$. מהו הערך הקטן ביותר של הביטוי $|xyz + 2(x + y + z)|$?

7. a, b, c הם מספרים טבעיים. מצא את כל הפתרונות של המערכת

$$a^2 = 4(b + c), \quad (1.5)$$

$$a^3 - 2b^3 - 4c^3 = \frac{1}{2}abc. \quad (1.6)$$

8. N היא קבוצת המספרים הטבעיים. נתונה פונקציה $f : N \rightarrow N$ (כלומר f המוגדרת עבור

מספרים טבעיים ומקבלת ערכים שהם מספרים טבעיים).

נתון עוד כי:

$$; f(1) = 1 \quad (\text{i})$$

$$; n \in N \text{ לכל } f(2n) = f(n) \quad (\text{ii})$$

$$.n \in N \text{ לכל } f(2n + 1) = f(2n) + 1 \quad (\text{iii})$$

בנתונים אלה:

א. מצא את M , הערך הגדול ביותר של $f(n)$ כאשר $1 \leq n \leq 1995$.

ב. מצא את כל המספרים n , $1 \leq n \leq 1995$, עבורם $f(n) = M$.