

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה ע"ש פרופ' יוסף גיליס – 2006

הערה: השאלות מסודרות ע"פ קושיין מהקל אל הקשה, ואולם סידור זה הוא אישי ולגביך יכול להתאים סידור אחר. לכן, אם נתקלת בשאלה קשה מומלץ לשקול לדלג עליה ולשוב אליה רק לאחר התמודדות עם השאלות האחרות.

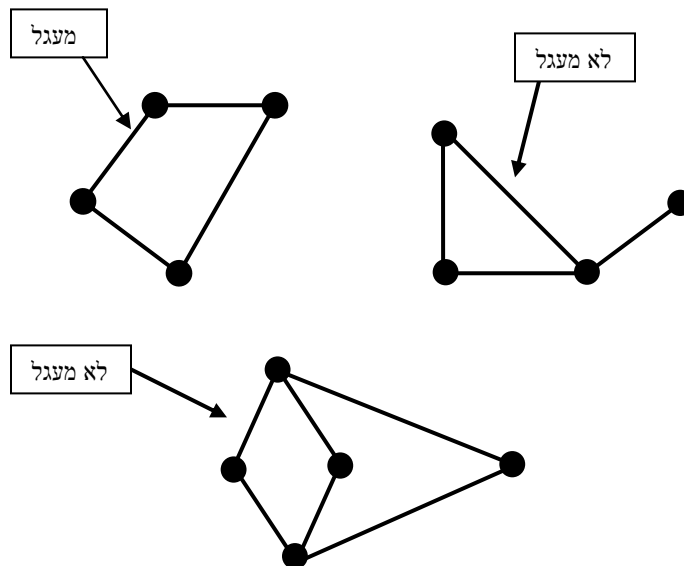
1. כמה מספרים המתחלקים ב-8 ניתן להרכיב מהספרות 4,5,6,7,8,9, כאשר כל ספרה מופיעה בדיוק פעם אחת ולא מופיעות שתי ספרות זוגיות /אי-זוגיות זו ליד זו?

2. במשולש ABC נתונים הגבהים $h_a = 2, h_b = 4, h_c = y$ כאשר h_a, h_b, h_c הם הגבהים היוצאים מקודקודים A, B, C בהתאמה. כמה משולשים לא חופפים קיימים עבור $y = 1; y = 3$?

3. נתון כי $(a+b+c)(x+y+z) = 3, (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$.
הוכח כי $ax+by+cz \geq 0$.

4. בכל נקודה עם הקואורדינאטות (m, n) במישור, כאשר m, n הינם מספרים חיוביים שלמים, רשום מספר חיובי שלם, $f(m, n)$. נתון שכל מספר מופיע על המישור פחות מ-2006 פעמים. הוכח שקיימים m, n שעבורם $f(m, n) > mn$.

5. במדינת לפוטה 20 ערים וכל שתי ערים מחוברות ע"י כביש. נאמר שאוסף כבישים מהווה מעגל, אם ניתן לנסוע באוסף כבישים זה באופן שחוזרים לנקודת ההתחלה ובכל כביש שבאוסף נוסעים בדיוק פעם אחת. בכל מעגל בן ארבעה כבישים מותר, לפי חוקי המדינה, למחוק כביש אחד. האם יתכן שלאחר מספר מסוים של מחיקות מותרות לפי החוק, הכבישים היחידים שיישארו יהיו מעגל באורך 20? אם תשובתך חיובית הסבר איך מגיעים למעגל זה ואם היא שלילית הוכח שלא ניתן לקבלו.



6. הצג את המספר $\frac{3^{44}-1}{80}$ בצורה $m_1^4 + m_2^4 + \dots + m_k^4$ כאשר מספר המחברים יהיה מינימלי וכל m_i הוא מספר שלם.