

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למתמטיקה

אולימפיאדת המתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן

תשס"ה

יום ה' כ"ו כסלו תשס"ה – 9.12.2004

ברוכים הבאים לטכניון. אנחנו מאחלים לכם עניין והנאה.

הוראות למתחרים

מתחרות ומתחרים יקרים:

- השאלות שלפניכם הן ברמות קושי שונות. נסו לפתור מספר רב של שאלות ככל הניתן.
 - אין להשתמש בכל חומר עזר, בפרט לא במחשבון.
 - הזמן המוקצב לתחרות הוא 3 שעות.
 - חלק מהפניות וההוראות בטופס זה מובאות בלשון זכר מטעמי נוחיות בלבד, והן מופנות לתלמידות ולתלמידים כאחד.
 - בתום התחרות יש להגיש מחברת בה תשובותיך.
 - נא לשים לב:
 - יש להתחיל כל שאלה בעמוד נפרד.
 - יש לנמק את כל התשובות.
 - יש להקפיד על ניסוח התשובות ועל צורת ההגשה:
 - נקודות אלה תלקחנה בחשבון בעת הערכת העבודות.
 - עבודות מרושלות ו/או בלתי קריאות, לא תבדקנה.
- בהצלחה!**
-

שאלות התחרות

1. מצא את המחלק המשותף הגדול ביותר של כל המספרים (הכתובים בבסיס 10) בני תשע ספרות, שאינם מכילים את הספרה 0, וכל ספרותיהם שונות זו מזו.
2. מצא את הערך המרבי של K , כך שלכל $x, y, z > 0$ המקיימים $x^2 > 4yz$ מתקיים אי השוויון $(x^2 - 4yz)^2 > K(2y^2 - xz)(2z^2 - xy)$.
3. יהי p מספר ראשוני, ויהי n מספר טבעי כך ש $np+1$ הוא ריבוע שלם. הוכח כי $n+1$ ניתן לכתיבה כסכום של p ריבועים שלמים.
4. עבור תחרות במתמטיקה לתלמידים הוכנו שמונה שאלות. כל נבחן קיבל שלוש שאלות מתוכן, ואף זוג נבחנים לא קיבל יותר משאלה זחה אחת. כמה תלמידים השתתפו בתחרות לכל היותר?
5. $ABCD$ הוא מרובע קמור שבו האורכים של ארבע הצלעות ושל שני האלכסונים הם מספרים רציונליים. תהי P נקודת החיתוך של האלכסונים AC ו- BD . הוכח כי גם אורכי הקטעים PA, PB, PC, PD הם מספרים רציונליים.
6. א. האם קיימות במישור ארבע נקודות שונות A, B, C, D כך שהאורך של חמישה מבין ששת הקטעים AB, BC, CD, DA, AC, BD הוא 1 ואילו אורך הקטע השישי קטן מ-1?
ב. יהי n מספר טבעי. האם קיימות n נקודות במישור, $A_1, A_2, \dots, A_n$, כך שאורכי n קטעים מבין הקטעים $A_i A_j$ $1 \leq i < j \leq n$ שווים 1, בעוד כל שאר האורכים קטנים מ-1?
7. על לוח משבצות ריבועי בגודל 8×8 משחקים את המשחק הבא: ראשית, צובעים שבע משבצות כלשהן באדום. אחר כך, בכל תור, צובעים באדום כל משבצת שיש לה לפחות שתי משבצות שכנות הצבועות באדום (שתי משבצות נקראות שכנות אם ורק אם יש להן צלע משותפת אחת). הוכח כי באף שלב של המשחק לא יהיה הלוח צבוע כולו באדום.