הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה

אולימפיאדת המתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן

תשס"ז

יום א', י"ד באדר, תשס"ז –4.3.2007

ברוכים הבאים לטכניון. אנחנו מאחלים לכם עניין והנאה.

הוראות למתחרים

מתחרות ומתחרים יקרים:

- השאלות שלפניכם הן ברמות קושי שונות. נסו לפתור מספר רב של שאלות ככל הניתן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, בפרט לא במחשבון.
- הזמן המוקצב לתחרות הוא 3 שעות.
- חלק מהפניות וההוראות בטופס זה מובאות בלשון זכר מטעמי נוחיות בלבד, והן מופנות לתלמידות ולתלמידים כאחד.
- בתום התחרות יש להגיש מחברת בה תשובותיך.
- נא לשים לב:
  - יש להתחיל כל שאלה בעמוד נפרד.
  - יש לנמק את כל התשובות.
  - יש להקפיד על ניסוח התשובות ועל צורת ההגשה:
    - נקודות אלה תילקחנה בחשבון בעת הערכת העבודות.
    - עבודות מרושלות ו/או בלתי קריאות, לא תיבדקנה.

בהצלחה!

שאלות התחרות

שאלה 1: מתחרה בתחרות מתמטית ניסה למצוא את הצלע a של משולש כאשר נתונות הצלעות b,c שלו, והזווית α ביניהן. הוא השתמש במשפט הקוסינוסים ואחר כך הפעיל את חוקי הלוגריתמים באופן שגוי כשכתב $\log(a^2)=\log(b^2)+\log(c^2)-\log(2bc\cos(\alpha))$. לאחר מכן הוא המשיך בפיתרון (ללא ביצוע טעויות נוספות) וקיבל את התשובה הנכונה. הוכח כי המשולש הנתון הוא שווה שוקיים.

שאלה 2: נתונה סדרת מספרים המוגדרת על ידי $a_1=2$ ועבור $n\ge 1$
$a_{n+1}=(a_n)^3-(a_n)^2+1,$. הוכח כי כל שני אברים בסדרה זאת זרים זה לזה (כלומר, המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1).

שאלה 3: נתונים שני מעגלים O_1 ו-O_2 הנחתכים בנקודות A ו- B. העבר, באמצעות סרגל ומחוגה, מיתר AC במעגל O_1 כך שנקודת החיתוך השניה שלו, P, עם המעגל O_2 תחצה אותו (כלומר A,P,C על ישר אחד, C על המעגל O_1, P על המעגל O_2, ומתקיים $AP=PC$).

שאלה 4: האם קיימת במרחב תיבה שניתן לחלק אותה ל 2007 תיבות אשר כולן דומות לתיבה המקורית? (שתי תיבות תקראנה דומות אם קיים מספר חיובי λ כך שאם נכפול את כל אורכי צלעות תיבה אחת ב λ, תתקבל תיבה החופפת לתיבה השניה).

שאלה 5: נתונים מספרים חיוביים a,b,c,x,y,z כך ש- $x+y+z=1$. הוכח כי
$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\le a+b+c$$

שאלה 6: יהי $p(x)=x^4+bx^3+cx^2+dx+1$ פולינום מדרגה 4 בעל מקדמים שלמים חיוביים, ובעל ארבעה שורשים ממשיים. הוכח כי $p(2006)\ge 2007^4$.

שאלה 7: משה שיחק את המשחק הבא עם חפיסה בת 52 קלפים. על פני הקלפים רשומים המספרים הטבעיים מ-1 עד 52. הקלפים מעורבבים בסדר כלשהו, מונחים בחבילה על השולחן כאשר פניהם מטה - אל השולחן, ואז נשלפים מהחבילה אחד אחד ומונחים בערימות, כשפניהם מעלה, לפי הכלל הבא: את הקלף שנשלף אחרון מותר להניח רק על קלף (שפניו מעלה) הנושא מספר גדול יותר, או "לפתוח" ערימה חדשה, מימין לערימות הקיימות, עם קלף זה. מטרת המשחק היא לערום את הקלפים במספר מינימלי של ערימות.
משה בחר לשחק לפי "אסטרטגית החמדן" שבה בכל שלב מניחים את הקלף שנשלף אחרון בערימה השמאלית ביותר האפשרית לפי כללי המשחק.
הוכח כי בכל משחק כזה מביאה אסטרטגית החמדן למספר המינימלי של ערימות בתום המשחק, מבין כל האפשרויות למשחק. כלומר, הוכח כי אין דרך משחק אחרת אשר תוביל למספר קטן יותר של ערימות מזאת שתוביל אליה אסטרטגית החמדן (אם כי אסטרטגית החמדן אינה בהכרח היחידה שתוכל להוביל לתוצאה זאת).