

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למתמטיקה

אולימפיאדת המתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן

תשס"ח

2.3.2008

יום א' כ"ה באדר א', תשס"ח

ברוכים הבאים לטכניון. אנחנו מאחלים לכם עניין והנאה.

הוראות למתחרים

מתחרות ומתחרים יקרים:

- השאלות שלפניכם הן ברמות קושי שונות. נסו לפתור מספר רב של שאלות ככל הניתן.
 - אין להשתמש בכל חומר עזר, בפרט לא במחשבון.
 - הזמן המוקצב לתחרות הוא 3 שעות.
 - חלק מהפניות וההוראות בטופס זה מובאות בלשון זכר מטעמי נוחיות בלבד, והן מופנות לתלמידות ולתלמידים כאחד.
 - בתום התחרות יש להגיש מחברת בה תשובותיך.
 - נא לשים לב:
 - יש להתחיל כל שאלה בעמוד נפרד.
 - יש לנמק את כל התשובות.
 - יש להקפיד על ניסוח התשובות ועל צורת ההגשה:
 - נקודות אלה תילקחנה בחשבון בעת הערכת העבודות.
 - עבודות מרושלות ו/או בלתי קריאות, לא תיבדקנה.
- בהצלחה!
-

שאלות התחרות

שאלה 1: חשב את השורש הריבועי של המספר $111...1222...25$ כאשר הספרה 1 מופיעה 2008 פעמים והספרה 2 מופיעה 2009 פעמים.

שאלה 2: מהו השטח הגדול ביותר האפשרי, של מרובע בעל צלעות באורכים 5, 9, 13, 15?

שאלה 3: נתונה סדרת מספרים המוגדרת באופן הבא:

a_1 הוא מספר טבעי כלשהו שאינו מתחלק ב 5. כמו כן

$$a_{n+1} = a_n + b_n$$

לכל $n \geq 1$, כאשר b_n שווה לספרה האחרונה של a_n .

הוכח כי יש בסדרה זאת מספר אינסופי של חזקות שלמות של 2.

שאלה 4: 2008 עצים מסודרים במעגל. על העצים נמצאים 1500 עורבים כך שאין שניים על אותו עץ. בכל דקה מדלג כל עורב אל אחד משני העצים השכנים לעץ עליו הוא נמצא. האם יתכן כי אחרי זמן סופי יהיו כל העורבים על עץ אחד?

שאלה 5: נתונים n מעגלים במישור ($n > 1$), כולם בעלי רדיוס 1. אין ביניהם זוג של מעגלים המשיקים זה לזה. נתון כי כל מעגל חותך לפחות מעגל אחד אחר מבין $n-1$ המעגלים האחרים. הוכח כי מספר נקודות החיתוך של המעגלים הללו הוא לפחות n .

שאלה 6: המספרים

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

הם מספרים חיוביים הקטנים מ $\frac{1}{2}\pi$ המקיימים

$$\tan(a_0 - \frac{1}{4}\pi) + \tan(a_1 - \frac{1}{4}\pi) + \dots + \tan(a_n - \frac{1}{4}\pi) \geq n-1$$

הוכח כי

$$\tan(a_0) * \tan(a_1) * \tan(a_2) \dots * \tan(a_n) \geq n^{n+1}$$

שאלה 7: קבע אם קיימת פונקציה F המוגדרת עבור מספרים רציונלים וערכיה הם מספרים רציונלים, כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $F(x) < a$ לכל a רציונלי,

ב. לכל a רציונלי, קבוצת כל המספרים הרציונלים b כך ש $F(b) < a < b$ היא סופית.