

תחרות על שם ירמיהו גרוסמן, תש"ע

זמן - שלוש שעות.

1. הוכיחו שהמספר $11111111...1$ שבו יש 2010 ספרות של 1 איננו סכום של שני ריבועים של מספרים שלמים.
2. הוכיחו שאי אפשר לחלק את המישור למעגלים. (הסברים: מעגל הוא ההיקף של עיגול. נקודה אינה נחשבת למעגל. "לחלק" פירושו שכל נקודה נמצאת בדיוק במעגל אחד).
3. תהא נתונה קבוצה של n נקודות במישור. הוכיחו שאפשר לסדר אותן בסדר $P_1, P_2, \dots, P_n$ כך שלכל $1 \leq i < n-1$ הזווית $\angle P_i P_{i+1} P_{i+2}$ חדה.
4. נתונות שתי קבוצות $A_1, A_2, \dots, A_m$ ו- $B_1, B_2, \dots, B_n$ של קשתות במעגל (ההנחה היא שקשת מכילה את שני קצותיה), ונתון שאיחוד הקשתות בכל אחת משתי הקבוצות מכסה את כל המעגל, כלומר $\bigcup A_i = \bigcup B_j$ הוא כל המעגל. הוכיחו שאפשר לכסות את המעגל באמצעות $m+n$ קשתות מהצורה $A_i \cap B_j$. ("נ" מציינ "חיתוך"). האם לכל m ו- n יש דוגמה לקבוצות כאלה, שעבורן נחוצות לפחות $m+n$ קשתות מהצורה $A_i \cap B_j$ לכיסוי כל המעגל? (הסברים: איחוד של קבוצות מכיל בדיוק אותם איברים שנמצאים לפחות באחת מהן. חיתוך של קבוצות מכיל את האיברים שנמצאים בכולן).
5. א. n נורות מסודרות על לוח, וכולן כבויות. אדם עומד מול הלוח, ומבצע סדרה של צעדים. בכל צעד הוא בוחר k נורות (כאשר k מספר קבוע לאורך כל הדרך) ומשנה את מצבן - כל אחת מן הנורות שבחר נדלקת אם הייתה קודם כבויה, וכבה אם קודם הייתה דלוקה. לאילו ערכים של n ו- k האדם יכול להגיע בסדרה סופית של צעדים למצב שבו כל הנורות דלוקות?
ב. נתון לוח ריבועי של 2010×2010 נורות, שבמצב ההתחלתי הן כבויות. בכל צעד הופכים את מצבן של 4 נורות שנמצאות ברצף אנכי, או רצף אופקי, או רצף אלכסוני (זווית של 45 או 135 מעלות לצדדי הלוח). הוכיחו שאי אפשר להגיע למצב שבו כל הנורות דלוקות.
6. בקטע $[0, 1]$ נתונה קבוצה S של 2010 מספרים. מחלקים את S בצורה שרירותית לשתי קבוצות, A ו- B . ידוע שבכל קטע I חלקי ל- $[0, 1]$ ההפרש בין מספר האיברים ב- A השייכים לקטע ומספר האיברים ב- B השייכים לקטע אינו עולה בערכו המוחלט על 10 (בנוסחה: $||I \cap A| - |I \cap B|| \leq 10$). הוכיחו: ההפרש בין סכום המספרים ב- A וסכום המספרים ב- B אינו עולה בערכו המוחלט על 10.