



תחרות גרוסמן

1. יהי נתון מרובע קמור $ABCD$ במישור בעל שטח S .

א. הראו כי $|AB||CD| + |BC||DA| \geq 2S$.

ב. עבור אילו מרובעים מתקיים שוויון בסעיף א?

2. תהיינה נתונות $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ו- $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ שתי קבוצות זרות של טבעיים אשר איחודן הוא בדיוק הקבוצה $\{1, 2, \dots, 2n\}$. הראו כי המקסימום של הביטוי $\sum_{i=1}^n |a_i - b_{\sigma(i)}|$ על פני כל התמורות σ של האינדקסים $1, 2, \dots, n$ (כלומר על פני כל הפונקציות החד-חד-ערכיות ועל: $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$) תמיד שווה ל- n^2 (לכל שתי קבוצות A ו- B כנ"ל).

3. חדר מלבני מרוצף ע"י מרצפות מלבניות בגדלים $a \times b$ ו- $c \times d$ (לא מותרים סיבובים). כאשר a, b, c, d טבעיים, $ab = cd$ והזוג (a, b) שונה מהזוג (c, d) . אחת המרצפות מסוג $a \times b$ נשברה. הראו כי לא ניתן לרצף את החדר מחדש בעזרת שאר המרצפות שנותרו שלמות ומרצפת נוספת בגודל $c \times d$.

4. יהיו $x_1, \dots, x_n$ ממשיים. הראו כי: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i + x_j| \geq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

5. נתונות אינסוף נורות המסודרות בשורה במצב כבוי. ליד כל נורה יש מתג אשר לחיצה עליו משנה את מצב הנורה (מכבוי לדלוק וההפך). כל אחד מ-2012 אנשים בתורו לוחץ על המתגים של 2013 נורות רצופות לפי בחירתו. נסמן ב- k את מספר הנורות הדלוקות לאחר שכל האנשים לחצו על המתגים.

א. הראו כי k זוגי.

ב. הראו כי לאחר שכל האנשים לחצו על המתגים, אין רצף באורך 2013 נורות המכיל יותר מ- $\frac{k}{2}$ נורות דלוקות.



6. נתון מחומש קמור P במישור בעל קדקדים $V_1, \dots, V_5$. חמשת הישרים המכילים את צלעות P מחלקים את המישור למספר סופי של תחומים.

א. יהי S תחום כלשהו מן התחומים הנ"ל מחוץ ל- P . הראו כי קיים זוג אינדקסים $1 \leq i < j \leq 5$ כך שלכל נקודה A ב- S מתקיים ששני הישרים דרך A המשיקים ל- P עוברים דרך V_i ו- V_j , בהתאמה.

אנו נכנה את הכיוון של הישר דרך V_i ו- V_j בשם הכיוון שמתאים ל- S .

ב. לכל נקודה A מחוץ ל- P , נצא מ- A לאורך קו ישר בכיוון המתאים לתחום שבו נמצאת A עד אשר נגיע לתחום אחר. שם נמשיך לאורך ישר בכיוון המתאים לתחום החדש עד אשר נגיע לתחום הבא וכך הלאה. הראו כי המסלול שמתקבל נסגר וחוזר חזרה לנקודה A .

7. עבור קבוצה (סופית) $S \subset \mathbb{R}^3$ נסמן ב- S_{xy} ההיטל של S על מישור ה- $x-y$. כלומר S_{xy} היא קבוצת כל הנקודות $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ כך שקיים $c \in \mathbb{R}$ ו- $(a, b, c) \in S$. באופן דומה נגדיר את S_{yz} ו- S_{xz} . הראו כי אם ידוע שהגודל של כל אחת מ- S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} שווה ל- n^2 (טבעי), אז הגודל של S הוא לכל היותר n^3 .