תחרות גרוסמן 2014 **- הפקולטה למתמטיקה בטכניון**

1. נתונה חפיסה מסודרת של קלפים הממוספרים מ־1 עד 2000. אנו מערבבים את הקלפים באופן הבא: אנו מוציאים את הקלף מספר 1 ושמים אותו במקום אקראי בתוך החפיסה. אחר כך מוציאים מהחפיסה את הקלף 2 ושמים אותו במקום אקראי בחפיסה. כך ממשיכים 2000 שלבים. בכמה מתוך 2000^{2000} האפשרויות לתהליך עירבוב הקלפים מופיע הקלף שמספרו 10 בסוף החפיסה (אחרי כל 2000 שלבים)? מצאו ביטוי פשוט ככל האפשר למספר זה. ייתכן שתרצו להציג את התשובה כסכום של איברים.

2. תהיינה A, B, C שלוש קבוצות סופיות של מספרים ממשיים. נסמן ב־$|A|$, $|B|$, ו־$|C|$ את הגדלים של הקבוצות A, B, ו־C, בהתאמה. נתון כי $|A|, |B| \leq |C| \leq |A| + |B|$. הראו כי מספר השלשות של איברים (a, b, c) כך ש־$a \in A,\ b \in B,\ c \in C$ ו־$a + b = c$, הוא לכל היותר $|A||B| - \frac{1}{4}(|A| + |B| - |C|)^2 + \frac{1}{4}$.

3. נתונות n נמלים על ציר המספרים בנקודות $x_1, \ldots, x_n$. בכל שלב ניתן לבחור שתי נמלים ואז הן נעות אחת לקראת השנייה עד שנפגשות באמצע הדרך ביניהן. כך ממשיכים כל עוד ניתן, אפילו אינסוף שלבים. מהו המרחק המירבי שיכולות ללכת כל הנמלים יחד בתהליך זה במידה ובחרנו את זוגות הנמלים בכל שלב בצורה החכמה ביותר?

4. נתון אוסף $\mathcal{F}$ של תתי קבוצות של $\{1, 2, \ldots, n\}$. ידוע כי לכל איבר i מבין 1 עד n יש לפחות שתי קבוצות באוסף $\mathcal{F}$ המכילות אותו ולפחות שתי קבוצות באוסף אשר אינן מכילות אותו. הראו כי קיימים זוג איברים $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ וארבע קבוצות A_1, A_2, A_3, A_4 באוסף $\mathcal{F}$ כך שהקבוצות $A_1 \cap \{i, j\},\ A_2 \cap \{i, j\},\ A_3 \cap \{i, j\},\ A_4 \cap \{i, j\}$ הן שונות זו מזו.

(המשך השאלות מעברו השני של הדף.)

5 נתונים 2000 ישרים במישור אשר אף שניים מהם אינם מקבילים ואף שלושה אינם עוברים באותה הנקודה.

א. הראו כי הישרים מחלקים את המישור למספר אי־זוגי של תחומים.

ב. הראו כי בין התחומים הנזכרים בסעיף א' קיים תחום S אשר לכל צלע e שלו יש התכונה הבאה: בחצי המישור המכיל את S והמוגדר ע"י הישר העובר דרך e יש יותר תחומים מאשר בחצי המישור שאינו מכיל את S ומוגדר ע"י אותו הישר.

6. מצולע במישור נקרא **קמור** אם הקטע המחבר כל שתי נקודות בו מוכל כולו בתוך המצולע. במישור נתון מצולע קמור P בעל n קדקדים אשר מכיל מצולע קמור אחר Q בעל n קדקדים אף הוא. דני אומר שבמצב כזה תמיד קיימת נקודה A בתוך P המקיימת שסכום מרחקיה מקדקדי P גדול או שווה לסכום מרחקיה מקדקדי Q. האם דני צודק? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

7. הראו כי במישור קואורדינטות לא קיים מצולע (שיכול להיות קמור או לא קמור) בעל 2013 קדקדים אשר כולם נקודות על שריג השלמים (כלומר, נקודות עם שתי קואורדינטות שלמות) וכל צלעות המצולע בעלות אותו האורך.