הפקולטה למתמטיקה בטכניון

תחרות גרוסמן

יום א', ט' בניסן תשע"ה / 29 מרץ 2015, 16:00-19:00

1. יהי נתון מצולע (פוליגון) קמור P (כלומר, עבור כל שתי נקודות ב־P הקטע הישר המחבר בינהן מוכל כולו ב־P) ונקודה O בתוך P. הראו כי קיימים שני קדקדים A ו־B של P כך ש־$2(|OA|+|OB|)$ קטן או שווה להיקף של P.

2. נתונה שורה אינסופית (לשני הכיוונים) של ארגזים. כל הארגזים ריקים פרט ל־n ארגזים רצופים המכילים כל אחד כדור אחד.

א. נניח שמותר לנו בכל צעד לקחת שני כדורים כלשהם ולהזיז כל אחד מהם לארגז סמוך לו אבל בכיוונים מנוגדים. עבור אילו ערכי n נוכל להגיע למצב שבו כל הכדורים נמצאים באותו ארגז?

ב. נניח שמותר לנו בכל צעד לקחת שני כדורים כלשהם ולהזיז כל אחד מהם לארגז סמוך לו (בכל כיוון). עבור אילו ערכי n נוכל להגיע למצב שבו כל הכדורים נמצאים באותו ארגז?

3. נתונים n אנשים עם יחסי הכרויות סמטריים בינהם (כלומר, חלק מזוגות האנשים מכירים זה את זה וחלק מזוגות האנשים אינם מכירים זה את זה). לכל איש יש מספר מסויים של אגוזים. בכל צעד בוחרים את אחד האנשים שברשותו מספר אגוזים שהוא לפחות כמספר האנשים שהוא מכיר. אם לא קיים איש כזה אז עוצרים. אחרת, האיש הנבחר נותן אגוז אחד לכל אחד מהאנשים שהוא מכיר. ממשיכים כך כל עוד לא נעצרים. הראו כי אם התהליך נעצר אחרי מספר סופי של צעדים, אזי מספר האגוזים הסופי שבידי כל אחד אינו תלוי בסדרת הצעדים שביצענו.

4. הראו כי אם a ו־b שלמים חיוביים והמנה $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ היא מספר שלם אזי היא בהכרח ריבוע של מספר שלם.

5. יהי נתון משולש שקדקדיו A, B ו־C. על הצלע AB בוחרים נקודה כלשהי Z. על הצלע BC בוחרים נקודה כלשהי X. על הצלע CA בוחרים נקודה כלשהי Y. הראו כי לפחות אחד המשולשים ΔAYZ, ΔBXZ, או ΔCXY הוא בעל שטח הקטן או שווה לרבע משטח המשולש ΔABC.

המשך השאלות בצד השני של הדף!

6. נתונים 2015 מספרים טבעיים (כלומר, שלמים הגדולים או שווים ל־1) שונים זה מזה $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2015}$. על ציר המספרים נתונות אינסוף נורות, נורה אחת עם מתג הדלקה/כיבוי ליד כל מספר שלם (אם לוחצים על המתג פעמיים חוזרים למצב ההתחלתי של הנורה). במצב ההתחלתי כל הנורות כבויות. בכל שלב מותר לבחור מספר שלם k ואז לוחצים על המתגים של הנורות במקומות $k, k+x_1, k+x_2, \ldots, k+x_{2015}$.

א. הראו כי ע"י סדרה של לכל היותר n שלבים ניתן להגיע למצב שבו כל הנורות במקומות $1, \ldots, n$ דלוקות (מבלי שאכפת לנו ממצב שאר הנורות).

ב. הראו כי ע"י סדרה של לכל היותר $\frac{n}{2} + x_{2015}$ שלבים ניתן להגיע למצב שבו כל הנורות במקומות $1, \ldots, n$ דלוקות (מבלי שאכפת לנו ממצב שאר הנורות).

7. נתון מערך של אינסוף ארגזים ריקים המסודרים בשורות וטורים אינסופיים (כמו בציור המצורף למטה). מגיעה קבוצה של 2015 בנות ולכל אחת 100 תפוזים. כל אחת מהבנות בוחרת 100 ארגזים רצופים באחת השורות לפי בחירתה ומניחה בכל ארגז שבחרה תפוז אחד. לאחר מכן מגיעה קבוצה של 2015 בנים ולכל אחד 100 תפוזים. כל אחד מהבנים בוחר 100 ארגזים רצופים באחד הטורים לפי בחירתו ומניח בכל ארגז שבחר תפוז אחד.

לאחר שכל הבנות והבנים הניחו את התפוזים, מהו המספר המינימלי האפשרי של ארגזים במערך שבכל אחד מהם מספר אי־זוגי של תפוזים?