תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', י"ג באלול תשע"ט / 13 ספטמבר 2019, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!**
2. **יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.**
3. **בתחרות אסור להשתמש במחשבונים, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.**

בהצלחה!

---

1. האם יש מספר שלם חיובי n ש־$n(n+1)$ הוא ריבוע של מספר שלם? מצאו n כזה או הוכיחו שהוא לא קיים.

2. קבלן התחייב לסלול כביש באורך 10 ק"מ. בשבוע העבודה הראשון הוא סלל 1 ק"מ. אחר כך הוא התחיל לעבוד לפי השיטה הבאה: אם עד שבוע מסוים הוא כבר סלל x ק"מ, אז באותו שבוע הוא סולל עוד $1/x$ ק"מ. האם הקבלן יסיים מתישהו לסלול את כל הכביש?

3. מלבן $ABCD$ מחולק באיזשהו אופן למלבנים יותר קטנים כך שהצלעות שלהם מקבילות לצלעות של $ABCD$. ידוע שכל ישר המקביל ל־AB וכל ישר המקביל ל־BC שעובר דרך $ABCD$ עובר דרך לפחות 3 מהמלבנים הקטנים. (כשמדובר על ישר העבור דרך מלבן זה כולל גם את המקרה שהוא מכיל אחת מהצלעות של המלבן). הוכיחו שמספר המלבנים הקטנים הוא לפחות 8. מצאו חלוקה של $ABCD$ ל־8 חלקים המקיימים את התנאי הנ"ל.

4. נתונה טבלת מספרים שלמים (לא בהכרח חיוביים) בצורת ריבוע 10×10. סכום כל המספרים בטבלה חיובי. הוכיחו שאפשר להחליף את סדר העמודות בטבלה כך שסכום המספרים הנמצאים באלכסון העובר מהפינה השמאלית העליונה של הטבלה לפינה הימנית התחתונה יהיה חיובי.

5. ידוע שלמספרים 2^n ו־5^n עבור איזשהו n שלם חיובי יש אותה ספרה ראשונה a. מצאו את כל הערכים האפשריים של a. **נמקו את תשובתכם בפירוט!**

6. נתון מרובע קמור $ABCD$ במישור. (מרובע נקרא קמור אם עבור כל שתי נקודות בו הקטע הישר המחבר אותן נמצא כולו במרובע). מצאו נקודה O בתוך $ABCD$ כך שארבעת הקטעים הישרים המחברים את O לנקודות האמצע של הצלעות AB, BC, CD, DA מחלקים את $ABCD$ לארבעה מרובעים בעלי אותו שטח. **הסבירו בפירוט איך למצא את O והוכיחו ש־O שמצאתם היא אכן הנקודה המבוקשת.**

7. נתונות שתי נקודות U ו־V במישור. דרך כל אחת משתי הנקודות עוברים 3 ישרים כך שכל אחד מהישרים העוברים דרך U פוגש כל אחד מהישרים העוברים דרך V בדיוק בנקודה אחת. מתוך נקודות המפגש הנ"ל נבחרו 3 נקודות R_1, R_2, R_3 שסומנו באדום ו־3 נקודות אחרות B_1, B_2, B_3 שסומנו בכחול, כך שעל כל אחד מהישרים יש בדיוק נקודה אדומה אחת ונקודה כחולה אחת. הוכיחו כי

$$\frac{UR_1\cdot UR_2\cdot UR_3}{UB_1\cdot UB_2\cdot UB_3}=\frac{VR_1\cdot VR_2\cdot VR_3}{VB_1\cdot VB_2\cdot VB_3}$$