תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', ד' בתשרי תשפ"א / 10 ספטמבר 2021, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 9 שאלות רבות ברירה. בכל שאלה יש תשובה נכונה אחת.**
2. **יש להגיש תשובות לכל השאלות דרך הטופס המקוון באתר התחרות.**
   אין אפשרות להגיש פתרונות או לשלוח תשובות או פתרונות בדוא"ל.

בהצלחה!

שאלה 1

מהו המספר השלם החיובי הקטן ביותר n שעבורו קיימים n מספרים ממשיים שונים שמכפלתם היא 1 וסכומם הוא 0?

תשובה:

1. $n = 3$
2. $n = 4$
3. $n = 11$
4. $n = 6$
5. $n = 5$
6. $n = 2$
7. $n = 7$
8. $n = 21$
9. $n = 13$
10. $n = 9$

שאלה 2

בבניין משרדים מסוים עובדים 2021 אנשים. חלק מזוגות האנשים שעובדים בבניין מכירים אחד את השני וחלק אינם מכירים אחד את השני (אנו מניחים בשאלה זו כי אם א' מכיר את ב' אז גם ב' מכיר את א'). נסמן ב־k את המספר הגדול ביותר כך שבכל מצב אפשרי של היכרויות בבניין בהכרח תהיה קבוצה של k אנשים בבניין שכל אחד מהם מכיר בדיוק את אותו מספר אנשים בבניין (אם כי לא בהכרח אותם אנשים).
סמנו את הטענה הנכונה לגבי k:

1. $k = 18$
2. $k = 1$
3. $k = 10$
4. $k = 15$
5. $k = 7$
6. $k = 2$
7. $k = 2021$
8. $k = 1010$
9. $k = 14$
10. $k = 0$

שאלה 3

יוסי ניצב מול 1000 נורות המסודרות במעגל אשר ממוספרות מ־1 עד 1000. (נגד כיוון השעון). דני גם הוא ניצב מול 1000 נורות אחרות המסודרות אף הן באותו האופן. ליד כל נורה ישנו מתג המשנה את מצב הנורה מדלוקה לכבויה ולהפך. בתחילה כל הנורות כבויות ויוסי ודני עומדים מול הנורות שמספרן הסידורי הוא 1, כל אחד במעגל שלו.

יעל מקריאה לדני וליוסי, פעם אחר פעם, 1111 פעמים, מספרים שלמים (לא בהכרח שונים) בין 1 ל־1000 בסדר כלשהו. כאשר יעל מקריאה מספר כזה x, יוסי לוחץ על המתגים של 22 נורות רצופות במעגל הנורות שלו החל מהנורה מספר x נגד כיוון השעון, וגם דני לוחץ על המתגים של 28 נורות רצופות במעגל הנורות שלו החל מהנורה מספר x נגד כיוון השעון.

נגיד שמספר שלם אי־שלילי m הוא <u>טוב</u>, אם לאחר שיעל הקריאה את כל 1111 מספרים, לא משנה איזה מספרים היא הקריאה, בשני המעגלים ביחד בהכרח יהיו לפחות m נורות דולקות.

מהו המספר הטוב הגדול ביותר מבין האפשרויות הבאות?

1. 35
2. 5
3. 60
4. 0
5. 25
6. 72
7. 22
8. 40
9. 55
10. 28

שאלה 4

דנה היא חזאית מזג אוויר ועליה לנבא בכל ערב במשך שנה שלמה (365 ימים) האם ירד גשם ביום שלמחרת או לא. לשם כך דנה מקבלת בכל ערב עצות מ־1000 מומחים: בכל ערב כל אחד מהמומחים אומר לדנה האם לפי דעתו ירד גשם למחרת. כלומר, בכל ערב על דנה לנבא האם ירד גשם למחרת או לא, ולשם כך היא יכולה להסתמך על כל מה שקרה עד אותו הערב ־ כלומר נתונות לה כל עצות המומחים עד אותו הערב (כולל) וכמו כן ידוע לה באיזה ימים ירד גשם עד אותו הערב.

כמו כן, נתון שאחד מהמומחים טועה לכל היותר פעם אחת בכל השנה. במלים אחרות, קיים מומחה (שזהותו איננו ידועה לדנה) שבכל הערבים, פרט אולי לערב אחד, ינבא נכונה האם ירד גשם ביום שלמחרת. על שאר המומחים לא ידוע כלום וכל אחד מהם עלול לטעות באופן כלשהו.

נסמן ב־M את מספר הטעויות הקטן ביותר עבורו קיימת לדנה אסטרטגית ניבוי המבטיחה שהיא תשגה לכל היותר M פעמים בתחזית שלה.

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. $0 \leq M \leq 9$
2. $10 \leq M \leq 25$
3. $26 \leq M \leq 55$
4. $56 \leq M \leq 85$
5. $86 \leq M \leq 135$
6. $136 \leq M \leq 160$
7. $161 \leq M \leq 185$
8. $186 \leq M \leq 250$
9. $251 \leq M \leq 330$
10. $331 \leq M \leq 365$

שאלה 5

ארבעה זוגות נשואים מתארחים אצל זוג אחר (סך הכל יש חמישה זוגות). בתחילת הערב חלק מהמשתתפים לוחצים ידיים אחד לשני כאשר ידוע שאף אחד לא לוחץ ידיים עם עצמו או עם בן/בת הזוג שלו וכל זוג אנשים לוחצים ידיים לכל היותר פעם אחת. בסוף הערב, המארח פונה לכל שאר המשתתפים ואומר: "כל אחד ואחת מכם/ן לחצו מספר שונה של ידיים". נסמן ב־x את מספר הידיים שלחצה המארחת (בת זוגו של המארח).

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. $x=0$
2. $x=1$
3. $x=2$
4. $x=3$
5. $x=4$
6. $x=5$
7. $x=6$
8. $x=7$
9. $x=8$
10. אין מספיק נתונים כדי לקבוע באופן חד ערכי את x.

שאלה 6

טבלה של מספרים ממשיים (לא בהכרח שונים) תיקרא ממויינת אם כל שורה וכל עמודה בטבלה הן ממויינות ־ כלומר, איברי כל שורה מסודרים בסדר לא יורד כשעוברים עליהם משמאל לימין, ואיברי כל עמודה מסודרים בסדר לא יורד כאשר עוברים עליהם מלמעלה למטה.

נגדיר פעולת מיון בסיסית על טבלה כפעולה שממיינת את כל האיברים בשורה נתונה או בעמודה נתונה. כך לדוגמא, הפעולה הבסיסית 'מיין את שורה 1' מסדרת מחדש את איברי שורה 1 כך שלאחר הסידור שורה 1 ממוינת. נסמן ב־n את המספר הקטן ביותר עבורו קיימת סדרה S של n פעולות בסיסיות אשר ממיינת כל טבלה בגודל 6×6. במלים אחרות, עבור כל טבלה A בגודל 6×6, אם מבצעים את אותן n הפעולות הבסיסיות לפי הסדרה S על הטבלה A אזי מתקבלת טבלה ממוינת. (שימו לב כי S היא סדרת אחת של פעולות שממיינת כל טבלה בגודל 6×6).

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. $n = 60$
2. $n = 12$
3. $n = 54$
4. $n = 18$
5. $n = 48$
6. $n = 24$
7. $n = 30$
8. $n = 42$
9. $n = 36$
10. $n = 6$

שאלה 7

מצולע במישור נקרא **קמור** אם עבור כל שתי נקודות במצולע הקטע ביניהן מוכל במצולע.
קבוצת נקודות במישור נקראת **כללית** אם אף שלוש נקודות בה לא נמצאות על ישר אחד.
תהא P קבוצה סופית של נקודות במישור. נאמר שאוסף Q של מצולעים קמורים **מכסה את קטעי** P אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הקודקודים של כל מצולע ב־Q שייכים ל־P,

2. כל קטע שמחבר שתי נקודות ב־P הוא צלע של אחד המצולעים ב־Q.

שתי נבחרות של תלמידים, נבחרת א' ונבחרת ב', משחקות במשחק הבא: נבחרת א' מסמנת במישור קבוצה כללית P של 2021 נקודות, ונבחרת ב' צריכה למצא אוסף Q של d מצולעים קמורים שמכסה את קטעי P. אם נבחרת ב' מצליחה לעשות את זה, היא מנצחת, ואם לא - נבחרת א' מנצחת.
נתבונן במספר המקסימלי d שעבורו נבחרת א' תנצח עם <u>כל</u> קבוצה כללית P של 2021 נקודות שהיא תסמן.
איזה מהמספרים הבאים הוא הקרוב ביותר לאותו d המקסימלי?

1. $100,000$
2. $200,000$
3. $300,000$
4. $400,000$
5. $500,000$
6. $600,000$
7. $700,000$
8. $800,000$
9. $900,000$
10. $1,000,000$

שאלה 8

משולש ΔABC ייקרא **כמעט שווה־שוקיים עם תכונת** $\alpha \geq 0$ אם $1 \leq \frac{|AB|}{|AC|} \leq 1+\alpha$.
(בשאלה זו גם כאשר שלושת הנקודות A, B, C נמצאות על ישר אחד מתיחסים ל־ ΔABC כמשולש).

מבין הערכים הבאים מהו ה־α הקטן ביותר עבורו זה נכון שכל קבוצה בת n נקודות במישור מכילה שלוש נקודות שהן קדקדי משולש כמעט שווה שוקיים עם תכונת α?

1. $\alpha = \frac{5}{n^{12}}$
2. $\alpha = \frac{5}{n^{10}}$
3. $\alpha = \frac{5}{n^{9}}$
4. $\alpha = \frac{5}{n^{3}}$
5. $\alpha = \frac{5}{n^{7}}$
6. $\alpha = \frac{5}{n^{6}}$
7. $\alpha = \frac{5}{n^{5}}$
8. $\alpha = \frac{5}{n}$
9. $\alpha = \frac{5}{\sqrt{n}}$
10. $\alpha = 1$

שאלה 9

נגיד שקבוצת נקודות במישור היא **כללית**, אם אף שלוש נקודות בה אינן על ישר אחד.
יהי n מספר חיובי שלם.

- קבוצה של $2n$ נקודות שונות במישור תיקרא **טובה**, אם היא כללית וכמו כן ניתן לחלק את הנקודות בה ל n זוגות כך שכל שני קטעים המחברים בין שתי נקודות שהן בנות זוג נחתכים.
- ישר העובר דרך זוג נקודות מקבוצה של $2n$ נקודות שונות במישור נקרא **ישר חוצה**, אם הוא מחלק את שאר הנקודות של הקבוצה לשתי קבוצות שוות גודל של $n-1$ נקודות כל אחת, הנמצאות בשני צדדי הישר. נשים לב כי בקבוצה טובה כל ישר העובר דרך שתי נקודות שהן בנות זוג הוא ישר חוצה.
- קבוצה של $2n$ נקודות שונות במישור תיקרא **יפה**, אם היא כללית וכמו כן לכל נקודה A בקבוצה קיימת בת זוג יחידה B בקבוצה כך שהישר שעובר דרך A ו B הוא ישר חוצה.

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. כל קבוצה כללית בת 100 נקודות היא קבוצה יפה.
2. כל קבוצה כללית בת 1000 נקודות היא קבוצה יפה.
3. כל קבוצה כללית בת 100 נקודות היא קבוצה טובה.
4. כל קבוצה כללית בת 1000 נקודות היא קבוצה טובה.
5. כל קבוצה יפה היא טובה אבל קיימת קבוצה טובה שאיננה יפה.
6. כל קבוצה טובה היא יפה אבל קיימת קבוצה יפה שאיננה טובה.
7. ישנה קבוצה טובה שאיננה יפה וישנה קבוצה יפה שאיננה טובה.
8. כל קבוצה כללית בת 100 נקודות היא או קבוצה יפה או קבוצה טובה.
9. כל קבוצה כללית בת 1000 נקודות היא או קבוצה יפה או קבוצה טובה.
10. כל קבוצה טובה היא יפה וכל קבוצה יפה היא טובה.