תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חטיבת הביניים

יום ו', כ' באלול תשפ"ב / 16 ספטמבר 2022, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.
3. בתחרות אסור להשתמש במחשבונים, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.

בהצלחה!

שם:

מספר זהות:

בית ספר:

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה):

טל' נייד:

כתובת דוא"ל (באותיות דפוס ברורות!):

שאלה 1

מגדת עתידות רואה שבהגרלת הלוטו יעלו 6 מספרים שלמים חיוביים שונים שמכפלתם 3200.

מהם?

שאלה 2

כמה מספרים שלמים בין 1 ל- $10^{12} = 1{,}000{,}000{,}000{,}000$ הם גם ריבוע של מספר שלם וגם חזקה שלישית של מספר שלם, אבל לא חזקה רביעית ולא חזקה חמישית של מספר שלם?

שאלה 3

יש חפיסה של 32 קלפים. על כל קלף כתוב מספר בין 1 ל- 1,000,000, והמספרים שונים זה מזה. הקלפים מסודרים במעגל סביב השולחן כשהם הפוכים ולא רואים את המספרים שכתובים עליהם. המטרה היא למצוא קלף שמספרו גדול מכל אחד משני שכניו. לא ידוע כמה קלפים כאלה יש, אבל מספיק למצוא אחד כזה.

האם תוכלו למצוא אותו אם מותר להפוך לכל היותר 10 קלפים לבחירתכם (אחד אחרי השני) ואסור לגעת בשאר הקלפים?

שאלה 4

נתונים שני מספרים חיוביים לא בהכרח שלמים, a ו-b. נקרא למשולש "טוב" אם יש לו שתי צלעות באורכים a ו-b. בהינתן משולש טוב, נקרא לזווית שלו "בכירה" אם היא הגדולה ביותר בין שלוש הזוויות שלו. מבין כל המשולשים הטובים נבחר משולש טוב שהזווית הבכירה שלו היא הקטנה ביותר. האורכים של שתיים מהצלעות שלו הם a ו-b.

מה האורך של הצלע השלישית במשולש הטוב שבחרנו?

שאלה 5

יש שני משולשים חדי זווית. אורכי הצלעות של המשולש הראשון הם a, b, ו-c. אורכי הצלעות של המשולש השני הם A, B, ו-C. כמו כן, ידוע ש $a < A$, $b < B$, ו-$c < C$.

הראו ששטח המשולש הראשון קטן משטח המשולש השני.

שאלה 6

באורוות המלך 75 סוסים, והוא אוהב לבחון את מהירותם וגם לסדר אותם בכל מיני דרכים. יום אחד הוא סידר אותם בשורה מהנמוך לגבוה – כל סוס גבוה מהקודם לו. ואז הוא בדק את משקלם, וראה שכל סוס יותר שמן מהקודם לו, חוץ מ-5 סוסים. כלומר, כל אחד מה-5 האחרים דווקא היה יותר רזה מהקודם לו בשורה. למחרת סידר אותם מהרזה לשמן ובדק את מהירותם. הוא ראה שכל סוס יותר מהיר מהקודם לו, חוץ מ-5 שדווקא היו איטיים יותר.

המלך רוצה לשלוח שלושה פרשים. כללי הטקס מחייבים שסוס א' יהיה יותר גבוה ויותר מהיר מסוס ב', וסוס ב' יהיה יותר גבוה ויותר מהיר מסוס ג'.

(1) הראו שיש באורוות שלושה סוסים מתאימים.

(2) לאחר שהפרשים יצאו לדרכם, האם בהכרח יש עוד שלושה סוסים מתאימים?

שאלה 7

בלוח משבצות בגודל 10×10 כותבים את המספרים $1, 2, 3, ..., 100$ בסדר כלשהו.

(1) האם בהכרח אפשר למצוא זוג משבצות סמוכות, כלומר עם צלע משותפת, שההפרש בין המספרים הכתובים בהן הוא לפחות 5?

(2) האם בהכרח אפשר למצוא כזה זוג עם הפרש לפחות 10?