

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חטיבת הביניים

27 בספטמבר 2024

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

שם בית הספר: _____

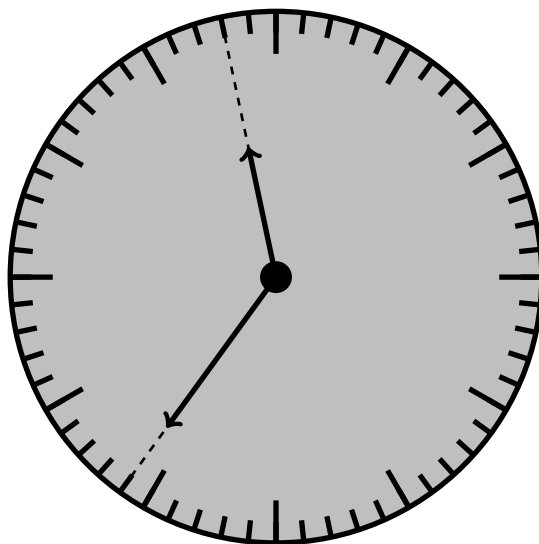
כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): _____

מספר טלפון נייד: _____

כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

נתבונן בשעון רגיל עם מחוג שעות, מחוג דקות, ו-60 שניות, כמו בציור.
כמה פעמים ביממה שני המחוגים מצביעים **בדיוק** על שתי שניות סמוכות?

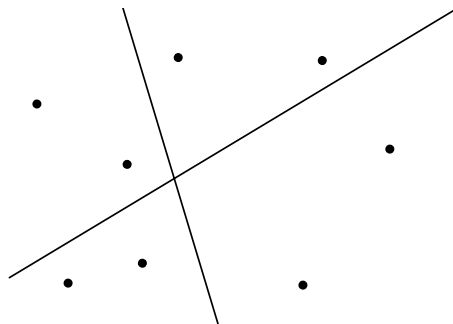


שאלה 2

מספר נקרא "משובח" אם הוא מורכב מהספרות 1,2,3,4,5,6 בסדר כלשהו. למשל, 324516 הוא מספר משובח. האם קיים מספר משובח שהוא סכום של שני מספרים משובחים?

שאלה 3

מציירים 2024 נקודות במישור כך שאין 3 נקודות על ישר אחד. הראו שאפשר לצייר שני ישרים אינסופיים שמחלקים את המישור לארבעה חלקים, כך שכל חלק מכיל בדיוק רבע מהנקודות. להמחשה, הנה שני ישרים שמחלקים כך קבוצה של 8 נקודות:



שאלה 4

נתונים 5 מספרים טבעיים כלשהם. הראו שיש ביטוי חשבוני שמכיל כל אחד מהם בדיוק פעם אחת, ומשתמש רק בפעולות חיבור, חיסור וכפל, כך שהתוצאה מתחלקת ב-100.

שאלה 5

בארץ גרוסמניה הרחוקה יש מספר כלשהו של ערים, ולכל עיר יש שלוש נבחרות בדיוק בשלושה ענפי ספורט שונים, כגון כדורגל, כדורסל, כדורעף, כדור-יד, כדור-מים, כדור-בסיס, וכדומה. בשנת 2024, כל שתי ערים בגרוסמניה קיימו משחק אחד בענף ספורט אחד כלשהו שבו יש לשתייהן נבחרת. קרה המקרה, ובשנת 2024 כל נבחרת בגרוסמניה או ניצחה בכל המשחקים שלה או הפסידה בכולם. כלומר, התברר שאף נבחרת של אף עיר לא ניצחה במשחק אחד והפסידה במשחק אחר. עם זאת, ייתכן שנבחרת של עיר כלשהי בענף ספורט מסוים ניצחה, והנבחרת של אותה עיר בענף אחר הפסידה. הראו שמספר הערים בארץ גרוסמניה אינו עולה על 8.

שאלה 6

נתונה טבלה גדולה של מספרים. בכל משבצת בטבלה רשום המספר השלם האי-שלילי הקטן ביותר שלא מופיע מימין לה באותה שורה או מעליה באותה עמודה. הנה כמה ערכים לדוגמה בפינת הטבלה:

			4	3	2	1	0
					3	0	1

אם ממספרים את העמודות 0, 1, 2, ... מימין לשמאל, וכן את השורות מלמעלה למטה, איזה מספר מופיע במשבצת שבשורה 101 ועמודה 202?

שאלה 7

נתונים מיליון מטבעות במשקלים לא ידועים $A < B$, לא כולם באותו משקל. כמו כן, נתונים מאזני כפות. רוצים למצוא כמה מהמטבעות הם במשקל A באמצעות כמה שפחות שקילות. נסו למצוא דרך לעשות זאת ב-300 שקילות או פחות.



פתרונות

שאלה 1

ארבע פעמים.

נראה שאם השעה היא בין חצות לצהריים, אז יש פעמיים כאלה. נגדיר $h \in \{0, \dots, 11\}$ להיות השעה ו- $m \in \{0, \dots, 59\}$ להיות כמות הדקה. הדקה חייבת להיות שלמה כדי שהמחוג יצביע בדיוק על שנת. מחוג השעות מצביע בדיוק על שנת חמש פעמים בשעה. השנת שעליה מצביע מחוג השעה היא

$$60 \left(\frac{h + m/60}{12} \right) = 5h + \frac{m}{12}.$$

כדי שזו תהיה שנת שלמה, הדקה חייבת להיות כפולה של 12, כלומר $m = 12k \in \{0, 12, 24, 36, 48\}$. נעבור על חמש האפשרויות, ונחפש האם מחוג הדקות יכול להיות בשנת סמוכה. כלומר, אנחנו מחפשים את כל הפתרונות למשוואה

$$5h + k = 12k \pm 1 \Rightarrow 5h = 11k \pm 1.$$

אם עוברים על כל חמש האפשרויות ל- k מקבלים שני פתרונות:

$$1. \quad h = 2 \text{ ו- } k = 1.$$

$$2. \quad h = 9 \text{ ו- } k = 4.$$

לכן שני הזמנים הם 2:12 ו- 9:48. ובחצי השני של היממה, 14:12 ו- 21:48.

שאלה 2

ידוע סימן ההתחלקות ב-9, האומר שהשארית של מספר מחלוקה ב-9 שווה לשארית של סכום הספרות שלו מחלוקה ב-9. לכן כל מספר משובח משאיר שארית 3 מחלוקה ב-9. מכאן שהסכום של שני מספרים כאלה משאיר שארית 6 מחלוקה ב-9, ולכן אינו יכול להיות משובח.

שאלה 3

לכל זווית ניתן למצוא ישר באותה זווית שמחלק את הנקודות לשני חצאים שווים (נזיז אותו ממינוס אינסוף לפלוס אינסוף). נחשוב עליו כעל חצי מישור. נסתכל בצורה דומה על החצי מישור שמתאימים לזוויות שונות מזו של החצי מישור הראשון ועד הזווית ההפוכה. נסתכל על מספר הנקודות בחיתוך של שני החצי מישורים. מספר זה מתחיל בחצי מהנקודות ומסיים באפס מהן. כאשר משנים את הזווית באופן רציף, כל עוד לא מגיעים לכיוון של ישר כלשהו העובר דרך שתיים מהנקודות, החלוקה לא משתנה. כאשר מגיעים לכיוון כזה, ייתכן ששתי נקודות בלבד יחליפו את החצאים שבהם הן נמצאות. לכן, בגלל הרציפות, יש זווית שבה החיתוך מכיל בדיוק רבע מהנקודות. נובע ששאר הרביעים גם מכילים בדיוק רבע מהנקודות.

שאלה 4

אפשר לפתור על ידי יצירת שתי כפולות של 10 והכפלתן זו בזו. תחילה נמייך את המספרים הנתונים ל-6 קבוצות המסומנות כך לפי ספרת האחדות שלהן:

$$\{0\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$$

למשל הקבוצה $\{3, 7\}$ תכיל מספרים כמו 13, 77, 123. תחילה ניצור כפולה אחת של 10:

- אם יש מספר בקבוצה $\{0\}$ אז נשתמש בו.
- אם יש שני מספרים באחת הקבוצות האחרות, אז הסכום או ההפרש שלהם יהיה כפולה של 10, למשל $13 + 77$.
- אחרת, בהכרח נשארנו עם מספר מכל אחת מהקבוצות האחרות, ונכפיל את זה מהקבוצה $\{5\}$ בזה מאחת הקבוצות הזוגיות, נגיד מהקבוצה $\{2, 8\}$.

בשביל ליצור כפולה נוספת של 10, ננסה שוב את שלוש האפשרויות הנ"ל. אם הן נכשלו, אז כעת יש לנו 3 מספרים. אף אחד מהם לא מהקבוצה $\{0\}$. או שיש מספר מהקבוצה $\{5\}$ והשאר אי-זוגיים, או שיש 3 מספרים מ-3 קבוצות שונות מבין 4 הקבוצות של 1, 2, 3, 4. נראה איך בכל מקרה אפשר ליצור מהם כפולה של 10:

- מספר מקבוצה $\{5\}$ כפול סכום שני אי-זוגיים: $5 \times (1 + 3)$
 - אחרת, או בעזרת חיבור וחסור: $1 + 2 - 3$, $1 + 3 - 4$
 - או על ידי יצירת 5 ומספר זוגי: $(1 + 4) \times 2$, $(2 + 3) \times 4$
- כמובן במקרים שספרת האחדות היא 6, 7, 8, 9 הופכים את הסימן בעזרת מינוס, ואז אפשר להשתמש במספר הנגדי כמו 1, 2, 3, 4 בהתאמה.

שאלה 5

לכל סוג נבחרת, ניתן לחלק את הערים לאלו שבהן הנבחרת ניצחה (1) ולאלה שבהן היא הפסידה (2). אם יש m סוגי נבחרות בסך הכל אז ניתן להתאים לכל עיר רשימה באורך m של $X/1/2$ כאשר X מציין שאין לעיר נבחרת בענף הספורט הזה. כל רשימה מכילה בדיוק שלוש פעמים 1 או 2, והשאר X . ולכל שתי ערים יש מקום ברשימה שבו כתוב 1 ו-2, המתאים לענף כלשהו שבו הן שיחקו. כעת, נתאים לכל עיר את קבוצת כל הרשימות באורך m של 1 ו-2 שמתקבלים מהרשימות הקודמות על ידי השלמה של ה- X בכל דרך אפשרית. קבוצות הרשימות האלה זרות זו לזו, כי הרשימות של כל 2 ערים שונות בענף הספורט שבו שיחקו. לכל אחת מהערים יש בדיוק 2^{m-3} רשימות. מכיוון שיש 2^m רשימות אפשריות, יש לכל היותר 8 ערים.

שאלה 6

על ידי חישוב עוד כמה ערכים בטבלה, מתגלה הנוסחה הכללית:

8	7	6	5	4	3	2	1	0	
	7	6	5	4	3	2	1	0	0
	6	7	4	5	2	3	0	1	1
	5	4	7	6	1	0	3	2	2
	4	5	6	7	0	1	2	3	3
	3	2	1	0	7	6	5	4	4
	2	3	0	1	6	7	4	5	5
	1	0	3	2	5	4	7	6	6
	0	1	2	3	4	5	6	7	7
									8

נשים לב לדוגמה שחוזרת על עצמה בריבועים של 1×1 , 2×2 , 4×4 , 8×8 , וכן הלאה, כאשר רק הריבוע $2^k \times 2^k$ קובע לסירוגין האם להוסיף 2^k למשבצות שבריבוע או לא. באופן כללי, בכל מקום בטבלה רשומה תוצאת פעולת ה-XOR של מספר השורה עם מספר העמודה, המסומנת

$$T(a, b) = a \oplus b$$

כלומר, רושמים את שני המספרים בבסיס 2, ואז מחברים את הספרות הבינאריות בכל מקום לחוד, לפי הכלל הבא:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0 \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$$

למשל, הפתרון לשאלה הוא

$$101 \oplus 202 = (1100101)_2 \oplus (11001010)_2 = (10101111)_2 = 175.$$

הערה: טבלה זאת נקראת גם פונקציית ספריינג-גראנדי של המשחק "נים".

הפתרון בהרחבה: נוכיח את הנוסחה לעיל באינדוקציה על מספר השורה + מספר העמודה. נתבונן בשורה a ועמודה b . אם $a = b$ אז מאינדוקציה נובע ישירות ש-0 אינו מופיע, ולכן הערך יהיה 0. באופן יותר כללי, הערך $a \oplus b$ אינו יכול להופיע מימין או מלמעלה. אכן, נניח למשל שאנו מקטינים את a ל- a' . נסתכל על הביט הכי שמאלי ששונה בין a ל- a' . הביט הזה יהיה שונה גם בין $a \oplus b$ לבין $a' \oplus b$ (ביט = ספרה בינארית)

נותר להראות שאם $c < a \oplus b$ אז ניתן להקטין את a או את b כדי להגיע ל- c . נסתכל על הביט הכי שמאלי ששונה בין $a \oplus b$ לבין c . מכיוון ש- c היותר קטן, הביט הזה הוא 1 ב- $a \oplus b$, ולכן 1 ב- a או ב- b , בלי הגבלת הכלליות ב- a . מכאן נובע ש- $a' = c \oplus b < a$, ולכן סיימנו.

שאלה 7

נפתור בשלבים. נניח שנתונים n מטבעות.

אם n אי-זוגי, אז נניח את אחד המטבעות בצד, ונבדוק אם משקלו A אחר כך. נוכל לעשות זאת בשקילה אחת לאחר שנמצא מטבע כלשהו מסוג A כפי שנראה בהמשך.

עבור n זוגי, מטרטנו למצוא חלוקה של המטבעות לשני חלקים של $n/2$ מטבעות כך שבכל חלק אותה כמות מטבעות מסוג A . כך נוכל לספור A באחד מהחלקים ולהכפיל את התוצאה ב-2.

נסדר את המטבעות במעגל, ונשקול $n/2$ מטבעות המופיעים ברצף על המעגל מול ה- $n/2$ האחרים. אם יצא שהחלקים שווים, אז מצאנו מה שרצינו.

כעת יש לנו $n/2$ מטבעות שהם קלים מהחלק המשלים, ולכן כוללים יותר מטבעות במשקל A . נשקול גם את הרצף בהיזה של 1, כלומר על ידי העברת מטבע למשלים בקצה אחד של הרצף והעברת מטבע מהמשלים בקצה השני. אם כעת החלקים שווים אז נמשיך עם אחד החלקים.

אם הרצף בהיזה של 1 כבד יותר מהמשלים שלו, בעוד שלפני שינוי שני מטבעות הוא היה קל יותר, אז בהכרח המטבעות שהוחלפו הם במשקל A ו- B , וגם נובע שבהסרת שני המטבעות האלה יש $n/2 - 1$ מטבעות שהם שקולים למשלים ואפשר להמשיך איתם ובסוף להכפיל פי שניים, ולהוסיף אחד עבור ה- A שמצאנו.

על ידי הזזת הרצף ב-1 שוב ושוב על ידי החלפת שני מטבעות, בהכרח נקבל מתישהו רצף שאינו קל מהמשלים שלו, שכן ידוע שזה יהיה המצב לאחר $n/2$ הזזות. אם כן, אנחנו מעוניינים למצוא רצף קל מהמשלים שלו, שאחרי ההיזה ב-1 יהיה שקול או כבד מהמשלים שלו, בכמה שפחות שקילות.

נמצא את זה בעזרת "חיפוש בינארי": תחילה נשווה את הרצף ההתחלתי לרצף בהיזה של $n/4$ מטבעות, מעוגלת למספר שלם אם צריך. כעת בכל מקרה יש לנו שתי הזזות במשקלים מנוגדים במרחק $n/4$. ניקח היזה שנמצאת $n/8$ מכל אחת מהן ונקבל זוג הזזות קל-כבד במרחק $n/8$, ונמשיך כך, עד שנמצא זוג הזזות סמוכות עם תוצאות שונות. נשים לב שעבור $n = 2^k$ מטבעות או פחות, אפשר לעשות זאת ב- k שקילות לכל היותר.

לקראת הסוף, כשהיו לנו רק שני מטבעות נשקול אחד מול השני. אם הם שונים, מצאנו אחד שהוא A . אם הם שווים, אז נשארנו עם מטבע אחד בלבד שצריך לברר את משקלו.

במקרה שבסוף נשארנו עם מטבע אחד, נשווה אותו ל- A שמצאנו בשלב מוקדם יותר בעזרת שקילה נוספת. אם בשום שלב לא מצאנו A , אז סימן שבכל שלב מצאנו חלקים שווים של $n/2$ מטבעות. מכיוון שנתון שלא כל המטבעות שווים, בהכרח אחד המטבעות שהשארנו בצד הוא שונה. אפשר להשוות לכל אחד מהם וכך לזהות מי במשקל A .

ספירת השקילות: בשלב הראשון יש מיליון מטבעות שזה פחות מ- 2^{20} , ולכן על ידי 20 שקילות לכל היותר אפשר לעבור לפחות מ- 2^{19} מטבעות, ואז לבצע לכל היותר 19 שקילות, וכן הלאה. בסוף נטפל בכלל היותר 20 מטבעות שהושארו בצד. מספר השקילות הוא לכל היותר:

$$20 + 19 + 18 + \dots + 2 + 1 + 20 = 20(20 + 1)/2 + 20 = 230$$