

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

27 בספטמבר 2024

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

שם בית הספר: _____

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): _____

מספר טלפון נייד: _____

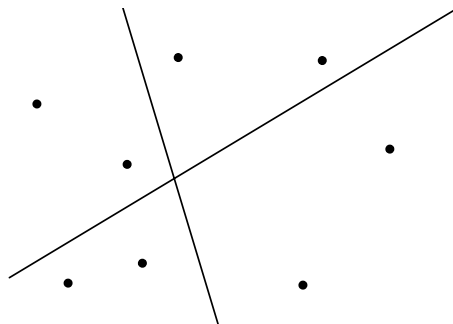
כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

האם אפשר למלא טבלה 5×5 במספרים כלשהם כך שאם מסתכלים על הסכום של כל שורה והסכום של כל עמודה מקבלים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 בסדר כלשהו?

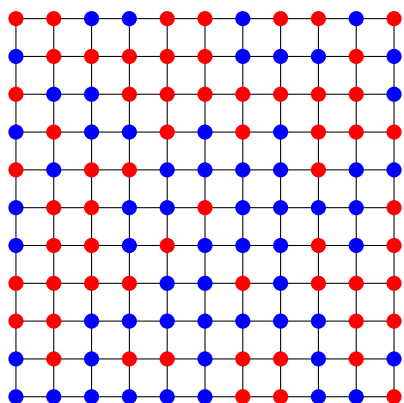
שאלה 2

מציירים 2024 נקודות במישור כך שאין 3 נקודות על ישר אחד. הראו שאפשר לצייר שני ישרים אינסופיים שמחלקים את המישור לארבעה חלקים, כך שכל חלק מכיל בדיוק רבע מהנקודות. להמחשה, הנה שני ישרים שמחלקים כך קבוצה של 8 נקודות:



שאלה 3

צובעים את נקודות השריג במישור (האינסופי) בשני צבעים, כמו בדוגמא הבאה:



נאמר שמלבן הוא "מיוחד" אם הוא מקביל לצירים, קודקודיו הם נקודות שריג הצבועות כולן באותו הצבע, ואורכי הצלעות שלו הם מספרים ראשוניים. האם בכל צביעה יש לפחות מלבן מיוחד אחד?

שאלה 4

נתונים 7 מספרים טבעיים כלשהם. הראו שיש ביטוי חשבוני שמכיל כל אחד מהם בדיוק פעם אחת, ומשתמש רק בפעולות חיבור, חיסור וכפל, כך שהתוצאה מתחלקת ב-1000.

שאלה 5

ניזכר כי פולינום הוא פונקציה מהצורה $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. המספרים $a_0, a_1, \dots, a_n$ נקראים מקדמי הפולינום.

מיצאו את כל הפולינומים P עם מקדמים שלמים שיש להם את התכונה הבאה: לכל שני מספרים שלמים x ו- y , הסדרות

$$x, P(x), P(P(x)), P(P(P(x))), \dots$$

-ו

$$y, P(y), P(P(y)), P(P(P(y))), \dots$$

מכילות איבר משותף.

שאלה 6

נתון אוסף אינסופי של עיגולים במישור (נזכיר שעיגול הוא • ואילו מעגל הוא ○). ידוע שלכל מספר טבעי n , יש באוסף n עיגולים זרים זה לזה, כלומר אין נקודה שנמצאת בשניים או יותר מ- n העיגולים. הוכיחו כי יש באוסף אינסוף עיגולים זרים זה לזה.

שאלה 7

במדינת גרוסמניה יש n ערים. הממשלה החליטה לחבר כל שתי ערים בכביש דו-סיטרי, ולצבוע את הכבישים בשלל צבעים. הכבישים נצבעו כך ש-

- כל כביש שמחבר שני ערים צבוע בצבע אחד לכל אורכו, הצבעים יכולים לחזור על עצמם, ולא ידוע כמה צבעים יש סך הכל.
- כל טיול שמתחיל ומסתיים באותה העיר שיש בו מספר אי-זוגי של נסיעות בין ערים, כולל לפחות שני כבישים בצבעים שונים.
- יש מספר טבעי k , כך שלכל עיר מגיעים כבישים בעלי k צבעים שונים בדיוק.

הוכיחו כי $n \leq 2^k$.

פתרונות

שאלה 1

סכום השורות שווה לסכום העמודות, ולכן צריך לחלק את המספרים בין 1 ל-10 לשתי קבוצות עם סכומים שווים. אבל זה בלתי אפשרי כי הסכום של המספרים בין 1 ל-10 הוא אי-זוגי (55).

שאלה 2

לכל זווית ניתן למצוא ישר באותה זווית שמחלק את הנקודות לשני חצאים שווים (נזיז אותו ממינוס אינסוף לפלוס אינסוף). נחשוב עליו כעל חצי מישור. נסתכל בצורה דומה על החצי מישור שמתאימים לזוויות שונות מזו של החצי מישור הראשון ועד הזווית ההפוכה. נסתכל על מספר הנקודות בחיתוך של שני החצי מישורים. מספר זה מתחיל בחצי מהנקודות ומסיים באפס מהן, ומרציפות, יש נקודות בה החיתוך מכיל בדיוק רבע מהנקודות. קל לבדוק ששאר הרביעים גם מכילים בדיוק רבע מהנקודות.

שאלה 3

נצבע את (x, y) בכחול אם $x + y$ משאיר שארית 0, 1 בחלוקה ב-4, ובאדום אם הוא משאיר שארית 2, 3 בחלוקה ב-4.

מכיוון שאף ראשוני אינו מתחלק ב-4, אם השארית של $x + y$ בחלוקה ב-4 היא m , אז המלבנים משאירים את השאריות הבאות:

$$m + 0, m + 1, m + 1, m + 2$$

$$m + 0, m + 1, m + 2, m + 3$$

$$m + 0, m + 1, m + 3, m + 0$$

$$m + 0, m + 2, m + 2, m + 0$$

$$m + 0, m + 2, m + 3, m + 1$$

$$m + 0, m + 3, m + 3, m + 2$$

בכל אחת מהאפשרויות יש שתי שאריות שהן במרחק 2 ולכן צבען שונה.

שאלה 4

נחלק כל מספר לפי ספרת האחדות שלו לחמש קבוצות:

$$\{0, 5\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}.$$

אם יש שני מספרים מאותה קבוצה, אז אפשר למצוא סכום או הפרש שלהם שמתחלק בעשר. אם יש שלושה מספרים, כל אחת מקבוצה אחרת, אז אפשר למצוא צירוף שלהם שמתחלק בעשר. אם ספרת האחדות של אחד מהם היא אפס, זה ברור. אם ספרת האחדות של אחד מהם היא חמש, אז או שאחד מהאחרים זוגי, או ששני האחרים אי-זוגיים, ואז ההפרש שלהם זוגי. הנה המקרים הנותרים:

$$1 + 2 - 3, 2 \times (1 + 4), 1 + 3 - 4, (2 + 3) \times 4$$

אם יש חמישה מספרים, אחד מכל קבוצה, אז אפשר למצוא צירוף שלהם שמתחלק במאה. אחד מהם מתחלק בחמש, לכן בהינתן ארבעה מספרים, אחד מכל קבוצה פרט לראשונה, מספיק למצוא

צירוף שלהם שמתחלק בעשרים. על ידי סכום או הפרש, אפשר לבנות מהזוגות הבאים שני מספרים שמתחלקים בחמש:

$$\{\{1, 9\}, \{4, 6\}\}, \{\{2, 8\}, \{3, 7\}\}$$

אם מסתכלים עליהם מודולו עשרים, רואים שסכום או הפרש שלהם מתחלק בעשרים. כעת נחזור לבעיה המקורית. נחלק את המספרים המקוריים לחמשת הקבוצות. כל עוד יש לפחות שניים באותה קבוצה, נהפוך אותם למשהו שמתחלק בעשר. נשים לב שזה קורה לפחות פעם אחת. אם זה קורה בדיוק פעם אחת, אז לאחר מכן יש לנו חמישה מספרים, אחד מכל קבוצה, וסיימנו. אם זה קורה פעמיים אז נשארים לנו שלושה מספרים, אחד מכל קבוצה, וסיימנו. אם זה קורה שלוש פעמים, אז סיימנו.

שאלה 5

נניח תחילה שהדרגה של P היא לפחות 2, ושהמקדם העליון הוא חיובי. עבור שלם x גדול מספיק, מתקיים $P(x) > x + 1$. כמו כן, קיים N כך שלכל $x > N$ יש לכל היותר שלם חיובי y אחד כך ש- $P(y) = x$. כדי לראות את זה, נשים לב שעבור x גדול מספיק

$$P(x + \Delta) - P(x) \approx Cx^{d-1}$$

כאשר d הדרגה של P . עבור Δ קבוע כלשהו ו- x גדול מספיק, זה אומר ש:

$$P(x - \Delta) < P(x) < P(x + \Delta)$$

לכל $s = 1, \dots, \Delta - 1$ יש מספר סופי של פתרונות ל- $P(x) = P(x \pm s)$, ולכן עבור x גדול מספיק, יש לכל היותר y אחד כך ש- $P(y) = x$.

כעת ניקח x גדול מספיק ו- $z = x + 1 < P(x)$. שתי הסדרות שמתחילות ב- x, z אינן יכולות להתאחד, כי זה יסתור את מה שהוכחנו למעלה.

אם המקדם העליון הוא שלילי, אז עבור x גדול מספיק, הסימן של $P(x)$ שונה מהסימן של x , וגם $|P(x)| > |x|$. במקרה כזה, הפולינום $P(P(x))$ צריך לקיים אותה תכונה, מה שסותר את מה שהוכחנו לעיל.

מכאן שהדרגה של P היא לכל היותר 1. אם P קבוע אז הוא מקיים את התכונה, לכן נניח ש- $P(x) = ax + b$. אם $|a| \geq 2$ אז הטיעון שהבאנו קודם עדיין עובד. אם $P(x) = x + b$ אז קל לראות ש- $b = \pm 1$. אם $P(x) = b - x$ אז $P(P(x)) = x$ ולכן התכונה אינה מתקיימת. לסיכום, האפשרויות הן פולינומים קבועים ו- $x \pm 1$.

שאלה 6

נקרא לקבוצת עיגולים טובה אם לכל מספר סופי n קיימים בקבוצה n עיגולים זרים. נשים לב שכל חלוקה של קבוצה טובה לאוסף סופי של קבוצות לפחות אחת הקבוצות בחלוקה תהיה גם טובה. מתחילים עם שני עיגולים זרים מהקבוצה. כל עיגול מהקבוצה שחותך את שניהם חייב להיות עם רדיוס שאורכו לפחות r עבור איזשהו קבוע חיובי $r > 0$. לכן, משיקולי שטח, מספר העיגולים בקבוצה שחותכים את שני העיגולים הוא סופי. לכן קבוצת העיגולים שאינה חותכת את שניהם היא טובה. ומעקרון שובך היונים, ישנו עיגול שקבוצת כל העיגולים שאינם חותכים אותו היא טובה, וכך בונים באינדוקציה את המשפחה הנדרשת.

ראשית נראה שאם יש ישר שעובר דרך כל המעגלים בקבוצה טובה אז היא מכילה אינסוף מעגלים זרים. ניקח שני מעגלים זרים ונפריד ביניהם על ידי ישר שמאונך לישר שעובר דרך כל שאר המעגלים. הישר הזה מחלק את הקבוצה הטובה לשלוש: כל המעגלים שנמצאים רק מצד שמאל שלו, רק מצד ימין שלו ומעגלים שחותכים את שני הצדדים שלו. כל המעגלים שחותכים את שני הצדדים שלו נחתכים אחד עם השני לכן זו לא קבוצה טובה, כלומר או שקבוצת כל המעגלים שמצד ימין טובה או כל המעגלים מצד שמאל טובה, וכל אחת המקבוצות האלו זרה לאחד משני המעגלים המקוריים. אם נמשיך ככה נקבל באינדוקציה אינסוף מעגלים זרים.

עכשיו עבור קבוצה טובה כללית נשתמש באותה האסטרטגיה. ניקח שני מעגלים ונפריד אותם עם ישר. הוא מחלק את הקבוצה לשלוש. אם קבוצת כל המעגלים שחותכים את שני הצדדים שלו (כלומר נחתכים עם הישר) טובה אז מהטיעון הראשוני סיימנו. אחרת אפשר להמשיך להפריד מעגלים בעזרת ישרים ולקבל באינדוקציה קבוצה זרה אינסופית.

שאלה 7

לכל צבע, הקשתות שמתאימות לו מהוות גרף דו-צדדי, ובהתאם, ניתן לחלק את הקודקודים שנוגעים בקשת מצבע זה לשתי קבוצות, 0 ו-1. אם יש m צבעים בסך הכל, אז אפשר להתאים לכל קודקוד וקטור באורך m של $0, 1, *$, כאשר כוכבית מציינת שאין קשת מהצבע הזה שנוגעת בקודקוד. כל וקטור מכיל עד k אפסים ואחדות, ולכל שני קודקודים יש קואורדינטה בה אחד מהם אפס והשני אחד. נתאים לכל קודקוד את הוקטורים באורך m של ביטים שמתקבלים מהוקטורים הקודמים על ידי השלמה של הכוכביות בכל דרך אפשרית. קבוצות הוקטורים הנ"ל זרות, וכל אחת מהן מכילה לכל היותר 2^{m-k} וקטורים. מכיוון שיש 2^m וקטורים בסך הכל, קיבלנו את החסם שרצינו.

בכיוון השני, ניתן לבנות צביעה כזו בדרך הבאה. נחשוב על הקודקודים כעל וקטורים בינאריים באורך k . כל שני וקטורים שונים בביט אחד לפחות. נבחר אחד מהם כצבע של הקשת בין הקודקודים המתאימים.