

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה – שלב א'

נא למלא את הפרטים האישיים בכתב ברור!

שם פרטי	שם משפחה	טלפון	כיתה	בית ספר
דוא"ל		כתובת דואר		

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים הבאים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדה העולמית למתמטיקה IMO (בואנוס איירס שבארגנטינה, יולי 2012). פתרון השאלות ופרטים נוספים יופיעו באתר <http://www.taharut.org/imo>.

מלאו בטבלה המצורפת תשובות סופיות בלבד – אין צורך לנמק. מותר להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

טבלת תשובות:

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	ירוקים:
			אדומים:
			כחולים:

בהצלחה!

שאלות

1. מצא את המספר השלם החיובי הקטן ביותר N , שעבורו

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{4} + \frac{N}{5} + \frac{N}{6}$$

הוא גם מספר שלם.

2. שבעה סמוראים נלחמים זה בזה. כאשר סמוראי נפגע שלוש פעמים, הוא מת, ולא ניתן לפגוע בו יותר. ייתכן כי שני סמוראים יפגעו זה בזה בו זמנית. נתון כי כמות הפגיעות הכוללת שהנחית כל סמוראי שונה מהכמות שהנחית כל סמוראי אחר.

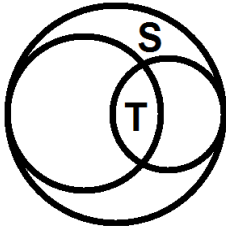
כמה סמוראים עלולים להיהרג בקרב? מצא את כל התשובות האפשריות.

3. מסביב לשולחן עגול יושבים לפחות שלושה אנשים, מתוכם t דוברי אמת ו- f שקרנים. דוברי אמת תמיד אומרים אמת, שקרנים תמיד משקרים.

כל אחד מהם טוען, ששני השכנים שלו הם מאותו סוג. מה יכול להיות ערך היחס $\frac{f}{t}$?

עליך למצוא את כל התשובות האפשריות.

4. פונקציה f , אשר מוגדרת בתחום של כל המספרים החיוביים, מקיימת משוואה



$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$$

מצא את הפונקציה.

5. נתונים שלושה מעגלים שקוטריהם 3, 4, 5. המעגלים הקטנים משיקים למעגל הגדול מבפנים, בנקודות נגדיות (ראה ציור). המעגלים הקטנים מחלקים את המעגל הגדול למספר חלקים. ניקח חלק אשר צורתו "משולש עקום", כלומר, הוא כלוא בין שלוש קשתות של מעגלים שונים. נסמן את

שטחו ב-S, ואת שטח החיתוך של שני העיגולים הקטנים ב-T. חשב את $\frac{T}{S}$.

$$\frac{\frac{1}{1 \cdot 100} + \frac{1}{2 \cdot 99} + \frac{1}{3 \cdot 98} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 52} + \frac{1}{50 \cdot 51}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}$$

6. חשב את ערך הביטוי

7. נתון מצולע משוכלל. על כל צלע של המצולע בונים משולש שווה-צלעות מחוץ למצולע. כשמחברים את הקודקודים החדשים של כל המשולשים בזה אחר זה, מקבלים מצולע משוכלל חדש בעל אותו מספר צלעות כמו המצולע המקורי. כמה צלעות יש למצולע המקורי אם שטחו של המצולע החדש גדול פי שלושה משטח המצולע המקורי?

8. מה צריך להיות הערך של k , על מנת שלגרף הפונקציה $y = x^4 + x^3 + kx$ יהיה ציר סימטריה?

9. נתון מגדל בצורת תיבה. גובהו 61 מטרים, ובסיסו הוא ריבוע שצלעו 9 מטרים. על הגג, בנקודה שנמצאת במרחק של שני מטרים מהקיר הצפוני ושני מטרים מהקיר המערבי, שפכו מיץ. נמלה נמצאת בתחתית המגדל, בפניה הדרום מזרחית. לנמלה יש חוש ריח מעולה ולכן היא מרגישה איפה בדיוק נשפך המיץ. מהו המרחק המינימלי שהיא צריכה לעבור בשביל להגיע לנקודה הזאת? (הנמלה יכול לזחול על הקירות והגג).

10. יש כדורים משלושה צבעים: אדום, ירוק וכחול. מותר להחליף חמישה כדורים ירוקים בכדור אדום, או להחליף שלושה כדורים אדומים בכדור כחול, או להחליף שני כדורים כחולים בכדור ירוק. בהתחלה ישנם 5771 כדורים מכל צבע. מבצעים החלפות כל עוד ניתן. כמה כדורים מכל צבע יישארו בסוף?