

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה לתלמידי תיכון – שלב א'

אנא מלאו את כל הפרטים האישיים בכתב ברור!

שם פרטי	שם משפחה	טלפון	שכבה	בית ספר
דוא"ל		כתובת דואר		תעודת זהות

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן.

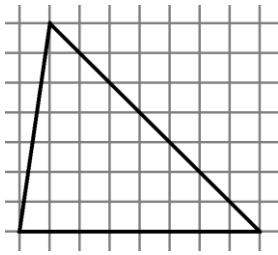
המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדה הבינלאומית במתמטיקה - IMO, שתיערך בתאילנד, ביולי 2015. פתרונות ופרטים נוספים יופיעו באתר <http://taharut.org/imo>.

כתבו בטבלה המצורפת את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק. אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

טבלת תשובות:

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8.
9.	10.

שאלות



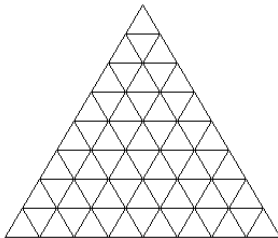
1. דף המשבצות שמופיע בציור מורכב ממשבצות ריבועיות. אורך הצלע של כל משבצת הוא 1. על הדף צויר משולש. מהו רדיוס המעגל החוסם את המשולש?

2. כמה פתרונות במספרים שלמים חיוביים יש למשוואה

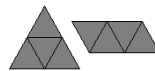
$$x^2 + 5xy = 5775$$

3. במשולש ABC נתון כי $AB = 8$, $AC = 6$ וכן כי התיכונים מ-B ומ-C מאונכים זה לזה. מצאו את אורך הצלע BC.

4. כל משבצת של ריבוע 4×4 נצבעת באחד משני צבעים, כחול או לבן. הצביעה נקראת מוצלחת אם בכל ריבוע בגודל 2×2 יש בדיוק 3 משבצות באותו צבע (כלומר, 3 לבנות ואחת כחולה או 3 כחולות ואחת לבנה). כמה צביעות מוצלחות שונות קיימות? שתי צביעות נחשבות שונות, אם קיימת משבצת שצבועה בצבע שונה בשתי הצביעות.



5. בתמונה מצויר לוח משולשי שמורכב מ-64 תאים משולשיים. מנסים לרצף אותו באמצעות מרצפות. כל תא משולשי חייב להיות מכוסה על ידי מרצפת אחת בדיוק. כל מרצפת מכסה 4 תאים בדיוק, וצורתה חייבת להיות משולש או מקבילית (חופפת לאחת הדוגמות).



מהי הכמות הקטנה ביותר של מרצפות בצורת משולש שיכולה להיות בריצוף?

$$\begin{cases} xy + xz = 54 + x^2 \\ yx + yz = 64 + y^2 \\ zx + zy = 70 + z^2 \end{cases} \quad 6. \text{ מצאו את כל הפתרונות למערכת המשוואות}$$

7. חודש נקרא **חודש מענג** אם יש בו 5 שבתות. מהו המספר הגדול ביותר של חודשים מענגים שיכול להיות בשנה? מדובר בחודשים של לוח השנה הלועזי. בכל חודש יש לפחות 28 ימים, אך לא יותר מ-31. בשנה יש 365 או 366 ימים. השנה יכולה להתחיל בכל יום בשבוע.

8. מצאו את כמות המספרים השלמים החיוביים בעלי 10 ספרות בדיוק, שמתחלקים ב-11 ושכל אחת מספרותיהם היא 5 או 7.

9. בתרגיל הכפל הבא כל אות מייצגת ספרה: $\text{מי} \times \text{דלי} = \text{מיימ}$. אותיות זהות מייצגות ספרות זהות ואותיות שונות - ספרות שונות. מספר לא יכול להתחיל ב-0. מצאו את כל האפשרויות עבור הגורם **דלי**.

10. קוביית סוכר מרחפת באוויר בלי להסתובב. על הקובייה מתיישבים 21 זבובים. הזבובים מגיעים בשלשות, בוחרים בקדקוד כלשהו של הקובייה, ומתיישבים על שלוש הפאות הסמוכות לקדקוד (זבוב אחד על כל פאה). לאחר שכל 21 הזבובים נוחתים, בכמה מצבים שונים הם יכולים להימצא? שני מצבים נחשבים שונים, אם יש פאה שעליה יש מספר שונה של זבובים בשני המצבים.

בהצלחה!