

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

תלמידי תיכון

אנא מלאו את כל הפרטים האישיים בכתב ברור!

שם פרטי	שם משפחה	מגדר	תעודת זהות	שכבה
		☐ בן ☐ בת		
טלפון		דואר אלקטרוני		
כתובת דואר (כולל רחוב, מספר בית \ דירה, עיר)				

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן.

המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדה הבינלאומית במתמטיקה - IMO, שתיערך בהונג קונג, ביולי

2016. פתרונות ופרטים נוספים יופיעו באתר <http://taharut.org/shlava>.

כתבו בטבלה המצורפת את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק.

אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

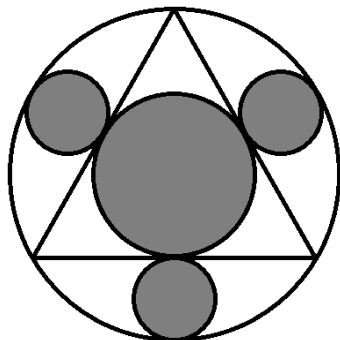
טבלת תשובות:

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8. א) ב)
9.	10.

שאלות

1. על הלוח כתובים כל המספרים השלמים מ-1 עד 210012. בכל דקה מבצעים את הפעולה הבאה על כל אחד מהמספרים: אם המספר מתחלק ב-100 אז מחלקים אותו ב-100, ואחרת מחסרים ממנו 1. מה המספר הגדול ביותר שיופיע על הלוח כעבור 183 דקות?

2. על דף נייר גדול צויר ריבוע שאורך צלעו 76, המחולק ל- 76×76 משבצות ריבועיות 1×1 . הגבולות בין המשבצות וגם הגבולות של הריבוע הגדול הם קווים שחורים. יוסי מעביר קו ישר אדום שלא עובר דרך אף קודקוד של אף משבצת. מהו המספר הגדול ביותר של פעמים שהקו האדום יכול לחתוך קווים שחורים?



3. בצויר רואים משולש משוכלל, מעגל חוסם ומעגל חסום, ושלושה מעגלים שמשיקים לאמצעי הצלעות של המשולש וגם למעגל החוסם. מצאו את המנה בין השטח האפור (סכום השטחים של ארבעת העיגולים הקטנים) לשטח של העיגול החוסם.

4. שלושה מספרים חיוביים כתובים על הלוח. ארבעה אנשים הסתכלו עליהם וטענו את הטענות הבאות:

אלה: "המספר הראשון גדול פי 2 מהמספר השלישי".
 בני: "המספר השני גדול פי 4 מהשלישי".
 גילה: "סכום המספרים הראשון והשני גדול פי 5 מהשלישי".
 דני: "המספר השני פחות המספר הראשון שווה לשלישי".

מבין הדברים שהם אמרו, שלושה היו נכונים ואחד שגוי. חשב את המנה בין המספר הראשון לבין סכום שני המספרים האחרים.

5. מצאו את כל זוגות המספרים השלמים (x, y) המקיימים $x^2 - y^2 + 22y - 26x + 53 = 0$.

6. נתון משושה משוכלל ABCDEF ונקודה P בתוכו. המרחק מ-P לישר AB הוא 100, המרחק מ-P לישר CD הוא 101, והמרחק מ-P לישר EF הוא 105. חשבו את המרחק מ-P לישר BC.

7. חשבו את ערך הביטוי

$$\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{997^2} + \frac{1}{999^2} - \frac{1}{1002^2} - \frac{1}{1004^2} - \frac{1}{1006^2} - \dots - \frac{1}{1998^2} - \frac{1}{2000^2}}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{999^2} + \frac{1}{1000^2}}$$

8. לשירה יש פנס. כדי להפעיל את הפנס נחוצות 4 סוללות תקינות. לשלומי יש ערימה של סוללות, שאחת מהן לא תקינה וכל האחרות תקינות. שירה יכולה לבדוק רביעיית סוללות בכך שהיא מכניסה אותן לפנס ובודקת האם הוא עובד. כמה בדיקות שירה תצטרך לבצע, על מנת למצוא את הסוללה הלא תקינה בערימה של שלומי, אם

- (א) בערימה יש 12 סוללות?
 (ב) בערימה יש 13 סוללות?

9. פונקציה f מקיימת $f(x) \cdot f(1 - \frac{1}{x}) = |x|$ לכל $x \neq 0$ ממשי. מצאו את $|f(6)|$.

10. במרובע ABCD, נתונות הזוויות $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$. בנוסף ידוע כי $\angle ADB = 30^\circ$, וכי $BC = \sqrt{50}$. חשבו את $AB + CD$ (יש לתת תשובה במפורש בתור מספר ולא בתור ביטוי).

בהצלחה!