

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

תלמידי תיכון – מועד ב'

לפניכם שאלון מתמטי בן תשע שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2021.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק. **אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.**

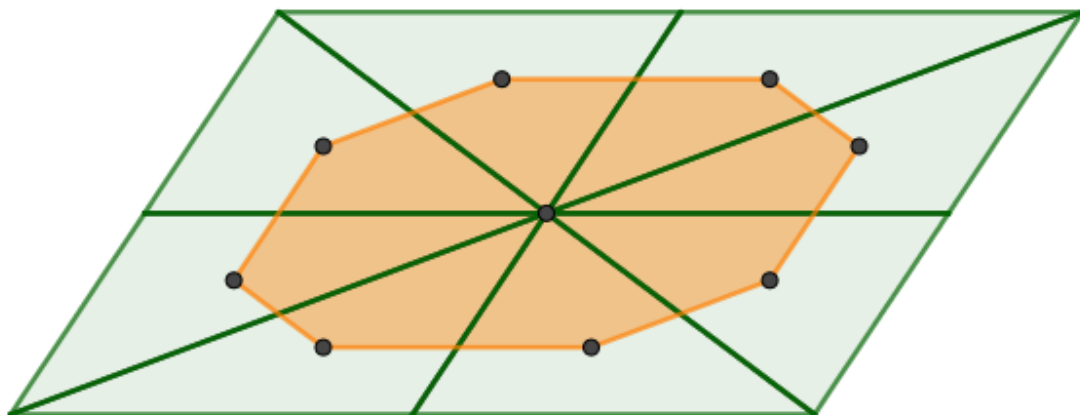
שאלות:

1. נתונה סדרה שמוגדרת על ידי $a_1 = 99999$, ונוסחת הנסיגה $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$. מצאו את סכום הספרות של a_{10} .

2. בטרפז שווה שוקיים שאורכי הבסיסים שלו הם 8 ו-18 חסום מעגל שרדיוסו R . מצאו את R .

3. למערכת המשוואות
$$\begin{cases} y^2 = 390 \cdot x^3 + x^2 \\ 2x^2 + y = 2xy + x \end{cases}$$
 יש מספר פתרונות (x, y) . מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי של y .

4. נתונה מקבילית ששטחה 900. במקבילית העבירו את שני האלכסונים, והעבירו קטעים שמחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות; כך חולקה המקבילית ל-8 משולשים. בכל אחד מבין 8 המשולשים סימנו את נקודת מפגש התיכונים שלו. חברו את 8 הנקודות שהתקבלו ונוצר מתומן כתום, כמו בציור. מצאו את שטחו של המתומן הכתום.





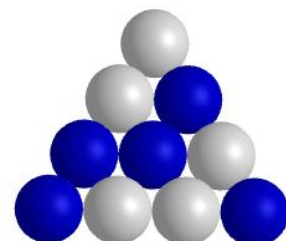
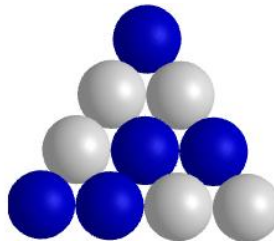
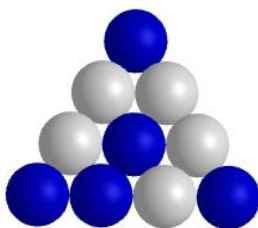
5. מספר N נקרא מוצלח אם הוא מתחלק לפחות בחצי מהמספרים מ-1 עד N (כולל). מצאו את הסכום של כל המספרים המוצלחים.

6. נתון כי $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5$ ובנוסף $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 6$. חשבו את $\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{c^4} + \frac{c^4}{a^4}$.

7. במישור העבירו 9 ישרים שונים: 3 ישרים אדומים, 3 ישרים ירוקים, ו-3 ישרים כחולים. הישרים מאותו צבע מקבילים וישרים בצבעים שונים אינם מקבילים. הישרים מחלקים את המישור ל- N חלקים.
א. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של N ?
ב. מהו הערך הקטן ביותר האפשרי של N ?

8. לדני יש מלאי בלתי מוגבל של כדורים כחולים ולבנים בגדלים זהים. הוא מדביק כדורים יחד ויוצר מהם משולשים, שכל אחד מורכב מ-10 כדורים, בדיוק 5 כחולים ובדיוק 5 לבנים, ומסודרים כמו באיורים. הוא מכניס את המשולשים לקופסה ונותן לאיילת. בתוך הארגז המשולשים יכולים להסתובב ולהתהפך. דני רוצה ליצור כמות גדולה ביותר של משולשים כאלה כך שאיילת תוכל להבדיל בין כל שניים. כמה משולשים דני יכול להכין?

לדוגמה, במשולשים באיור, איילת לא תוכל להבדיל בין שני המשולשים הימניים, אך כן תוכל להבדיל בינם לבין המשולש השמאלי.



9. נתונה תיבה שאורכי המקצועות שלה הם מספרים שלמים. סכום האורכים של כל 12 המקצועות של התיבה ועוד הנפח שלה שווה לשטח פניה. מהו הנפח המרבי של התיבה?

בהצלחה!