

גמר אליפות הארץ במתמטיקה

אין להשתמש במחשב או במחשבון עבור חישוב, הכנת סרטוט או כתיבת פתרונות.
יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תקבל ניקוד.

1. שלישייה של משבצות שונות בלוח שח 8×8 נקראת אגדית אם לשלושתן יש קודקוד משותף. ליאור יוצר רשימה של N שלישיות אגדיות כך שלכל שתיים מהן יש משבצת משותפת אחת לכל היותר. מהו ה- N הגדול ביותר עבורו זה אפשרי?

2. נתון משולש ABC . נסמן ב- P_A את הפרבולה עם מוקד A ומדריך BC . באופן דומה נגדיר פרבולות P_B ו- P_C . הראו שלכל שתיים מבין שלוש הפרבולות יש נקודה משותפת אחת לכל היותר, ואם היא קיימת אז היא נמצאת על המעגל החוסם של המשולש.

תזכורת. בהינתן ישר ℓ ונקודה F , פרבולה עם מוקד F ומדריך ℓ היא המקום הגיאומטרי של הנקודות X , עבורן המרחק מ- X ל- F שווה למרחק מ- X לישר ℓ (כאשר מרחק מנקודה לישר הוא אורך האנך).

3. הראו כי $\prod_{a=1151}^{1218} (a^4 - 4^a)$ מתחלק ב- 17^{18} .

4. משושה משוכלל $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ אינו מוכל במצולע משוכלל עם 24 קודקודים $A_1A_2B_3 \dots B_{11}B_{12}$ קודקודים $A_1A_2C_3 \dots C_{23}C_{24}$, אבל מוכל במצולע משוכלל עם 12 קודקודים A_2C_{11} ו- A_3B_9 , A_5B_5 נחתכים בנקודה אחת. הראו כי הישרים A_2C_{11} , A_3B_9 , A_5B_5 נחתכים בנקודה אחת.

5. הראו שלכל שלושה מספרים חיוביים a, b, c מתקיים:

$$\frac{b+c-a}{\sqrt{(a+2b)(a+2c)}} + \frac{a+c-b}{\sqrt{(b+2a)(b+2c)}} + \frac{a+b-c}{\sqrt{(c+2a)(c+2b)}} \geq 1$$

בהצלחה!