

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

תלמידי תיכון – מועד א'

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2022.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק.
אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

שאלות:

1. נתון כי $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{9999}$. מצאו את x^2 .

2. נתון טרפז ABCD כאשר הבסיסים הם AB ו-CD. נסמן את מפגש אלכסוני הטרפז ב-X. נתון שהשטח של המשולש ABX הוא 18 ושטח המשולש CDX הוא 50. מצאו את שטח הטרפז.

3. על דף נייר מסומן מעגל ועליו מודגשות 6 נקודות. יוסי רוצה לסמן את הנקודות ב-6 האותיות A, B, C, D, E ו-F, כך שכל אות תופיע פעם אחת בדיוק, ושהמשולשים ABC ו-DEF לא יחתכו. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

4. מתוך 11 אנשים הורכבו מספר ועדות. חלק מהאנשים שקרנים (תמיד משקרים) וכל השאר דוברי אמת. לכל ועדה הרכב שונה, אך אותו בן אדם יכול להשתתף במספר ועדות. בכל ועדה לפחות 2 אנשים.

בכל אחת מהוועדות כל משתתף התלונן שלפחות אחד מהאנשים האחרים שנמצאים איתו בוועדה הוא שקרן.

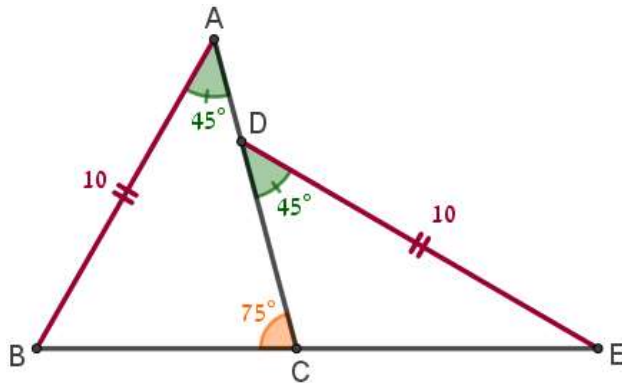
מהו המספר המרבי של ועדות שהיו יכולות להתקיים?

5. מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי של $M - N$, בהינתן ש- M ו- N הם מספרים תלת-ספרתיים בעלי סכום ספרות זהה.

6. המספרים x, y מקיימים מערכת משוואות:

$$\begin{cases} \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = 3500 \\ \sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 1500 \end{cases}$$

מצאו את $|x - y|$.



7. על הקטע BE נמצאת נקודה C. נתונות נקודה A שאינה על הישר BE ונקודה D על הקטע AC. נתון בנוסף כי הזוויות $\angle BAC$ ו- $\angle CDE$ שוות ל- 45° , והזווית $\angle BCA$ שווה ל- 75° מעלות. נתון בנוסף כי $AB = DE = 10$. מצאו את סכום שטחי המשולשים ABC ו-CDE.

התמונה היא להמחשה בלבד, לא מומלץ למדוד שטחים לפי התמונה.

8. נתונים שלמים חיוביים a, b, c, n כך שארבעת המספרים

$$ab + a$$

$$bc + b$$

$$ca + c$$

$$(a + 6)(b + 6)(c + 6)$$

מתחלקים ב- n . מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי עבור n .

9. ישנה חלקת אדמה בגודל 9×9 המחולקת למשבצות בגודל 1×1 . בארבע מן המשבצות, המסודרות בריבוע 2×2 , קבורים אוצרות. באפשרותכם לבחור בכל פעם משבצת אחת, ולבדוק האם קבור בה אוצר. מהי כמות הפעולות הקטנה ביותר לה תזדקקו כדי לדעת בוודאות היכן נמצאים כל האוצרות?

(אין צורך לראות את כולם, מספיק לדעת היכן הם נמצאים)

10. משולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים, הזווית A ישרה. בתוך המשולש נבחרה נקודה P עברה $CP = 7$, $BP = \sqrt{149}$, $AP = \sqrt{50}$. מצאו את AB.

בהצלחה!