

8.11.2021
ד' בכסלו תשפ"ב



אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

תלמידי תיכון – מועד ב'

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO, שתיערך בקיץ 2022.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק. **אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.**

שאלות:

1. נניח כי $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} = \frac{138}{83}$. מצאו את x .

2. שחר, אלמוג ודרור קיבלו 15 חפיסות שוקולד זהות והם רוצים לחלק אותן ביניהם. שחר רוצה לקבל לפחות 2 חפיסות, אלמוג רוצה לקבל לפחות 3 חפיסות ודרור רוצה לקבל לפחות 4 חפיסות. בכמה דרכים שונות הם יכולים לחלק את השוקולד ביניהם כך שכולם יהיו מרוצים?

3. נתון משולש שאורכי צלעותיו הם $4\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$ ו- $4\sqrt{5}$. מצאו את הרדיוס של המעגל החוסם של המשולש.

4. בשורה יש 5 בורות. חרגול יושב בבור השמאלי ביותר. כל דקה החרגול קופץ לבור סמוך. בכמה דרכים החרגול יכול לבצע 10 קפיצות ולסיים בבור האמצעי?

5. דני מצא את כל הפתרונות למשוואה $mn = 3m + 7n$ כך ש- m ו- n שלמים. חשבו את סכום כל הערכים שהוא קיבל עבור n .

6. בלוח 19×19 סומנו מספר משבצות כך שמתקיימים הדברים הבאים:

- בכל שורה יש מספר זהה של משבצות מסומנות.
 - בכל ריבוע 2×2 שמורכב מארבע משבצות יש בדיוק משבצת מסומנת אחת.
- כמה משבצות מסומנות יש בעמודה:
- א. שיש בה הכי הרבה משבצות מסומנות?
- ב. שיש בה הכי מעט משבצות מסומנות?

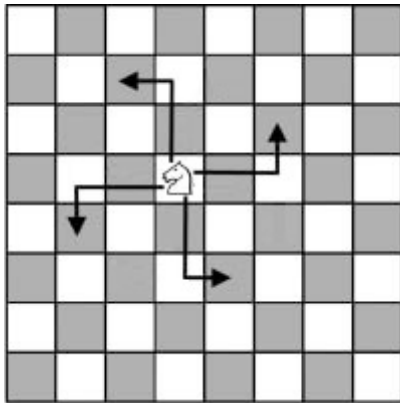
8.11.2021
ד' בכסלו תשפ"ב



מדינת ישראל
משרד החינוך

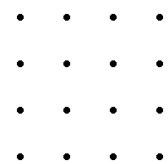
7. המחומש ABCDE קמור (כל הזוויות הפנימיות קטנות מ- 180°). אורכי צלעותיו הם $AB=5$, $BC=4$, $CD=9$, $DE=1$, $EA=5$. בנוסף נתון כי AB מקביל ל-CD וגם כי BC מקביל ל-DE. מצאו את שטח המחומש.

8. למשוואה $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x-3} + \frac{x+6}{x-5} + \frac{x+8}{x-7} = -4$ יש בדיוק n פתרונות ממשיים והם $x_1, x_2, \dots, x_n$. מצאו את $2 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.



9. פרש צולע על רגל שמאל זה פרש שחמט שבכל מהלך הולך שני צעדים בכיוון מסוים, ואז פונה שמאלה ועושה צעד אחד נוסף. מה המספר המקסימלי של פרשים צולעים על רגל שמאל שאפשר לשים על לוח שחמט מבלי שהם יאיימו אחד על השני? הערה: פרש צולע מאיים על משבצת אם הוא יכול להגיע אליה במהלך אחד.

10. בדף משבצות סומנו 16 קודקודים כמתואר בציור. כמה משולשים קהי זווית ישנם ששלושת קודקודיהם מסומנים?



בהצלחה!