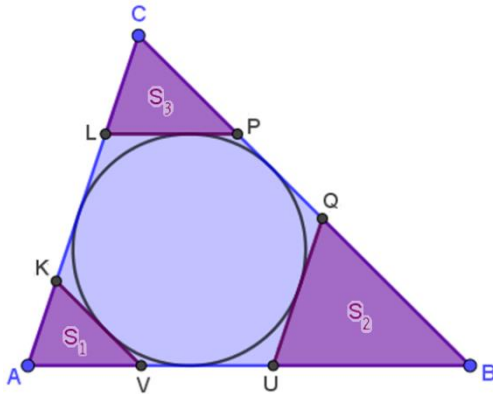


גמר אליפות הארץ במתמטיקה



1. במשולש מעבירים קטעים שמקבילים לצלעותיו ומשיקים למעגל החסום. הקטעים מחלקים את המשולש לארבעה חלקים: משושה ושלושה משולשים קטנים (כמו בציור). נסמן ב- S_1, S_2, S_3 את שטחי המשולשים הקטנים, וב- S את השטח של המשולש המקורי. הראו כי $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.

2. לכל מספר טבעי n מגדירים את $b(n)$ בצורה הבאה: מחליפים כל ספרה זוגית ב-0, וכל ספרה אי-זוגית ב-1, ומוחקים את האפסים בתחילת המספר. למשל $b(348) = 100$, $b(24769) = 101$. נגיד על המספרים m ו- n שהם דומים אם $b(m) = b(n)$. בסדרה החשבונית הם מספרים שלמים חיוביים שקטנים מ-1000000 ואף שני איברים בסדרה לא דומים. מהו הערך הגדול ביותר של K עבורו זה אפשרי?

3. בלוח משבצות 9×9 סימנו מספר משבצות כך שכל ריבוע 3×3 וכל מלבן 6×1 או 1×6 בתוך הלוח מכיל משבצת מסומנת. מהי הכמות המינימלית של משבצות מסומנות?

4. פתרו את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = y^2 x \\ 1 + x + y + x^2 y^2 = 2x^2 y + y^2 x \end{cases}$$

5. נתון לוח שחמט בו השורות ממוספרות מ-1 עד 8, וכך גם העמודות. בכל משבצת כתוב מספר מ-1 עד 8. אחת המשבצות בלוח צבועה באדום.

בהתחלה, אבי הציב צריח על המשבצת המסומנת באדום. בצעד הראשון, הוא מזיז את הצריח למשבצת באותה שורה שמספר העמודה שלה זהה למספר על המשבצת שעליה מונח כעת הצריח. בצעד השני, הוא מזיז את הצריח למשבצת באותה עמודה שמספר השורה שלה זהה למספר על המשבצת שעליה מונח כעת הצריח. אבי ממשיך לבצע צעדים כאלה, כאשר הוא מזיז את הצריח בשורה ובעמודה לסירוגין. לאחר 64 צעדים, הצריח חוזר למשבצת האדומה לאחר שביקר בכל משבצת אחרת בלוח פעם אחת בדיוק.

לאחר מכן אבי התחיל תהליך דומה מהמשבצת האדומה, אך החליף בין צעדי השורה לצעדי העמודה (הצעד הראשון היה בעמודה, השני היה בשורה, וכן הלאה). האם יתכן שגם בתהליך השני, הצריח יחזור למשבצת האדומה לאחר 64 צעדים כאשר הוא ביקר בכל משבצת אחרת פעם אחת בדיוק?

6. נקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC . המעגלים החסומים של המשולשים ABD ו- ACD הם β ו- γ בהתאמה, ומרכזיהם הם I_B ו- I_C בהתאמה. מרכז המעגל החסום ב- ABC יסומן ב- I . המעגל β משיק ל- AB בנקודה E ול- BC בנקודה P . המעגל γ משיק ל- AC בנקודה F , ול- BC בנקודה Q . הישרים AI_B ו- EP נפגשים בנקודה X , והישרים AI_C ו- QF נפגשים בנקודה Y . הראו כי הישר ID והאנכים האמצעיים של PQ ושל XY נפגשים בנקודה אחת.

בהצלחה!