



אולימפיאדה ארצית במתמטיקה תשפ"ד - שלב א'
תלמידי ט-יב – סבב ראשון מועד א 11.9.2023

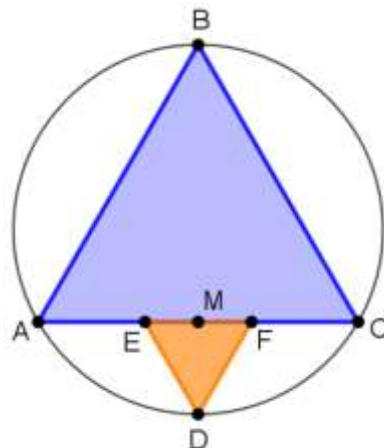
לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק.
אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

שאלות:

1. בקופסה יש 50 פנסים מאותו סוג ו-100 סוללות מאותו סוג. מתוכם רק 40 פנסים תקינים ורק 70 סוללות תקינות. בשביל לקבל פנס שדולק, צריך להכניס לפנס תקין שתי סוללות תקינות. בכל בדיקה יוסי לוקח שתי סוללות, ומכניס אותן לפנס ומנסה להדליק אותו. כמה בדיקות עליו לבצע על מנת שיקבל פנס דולק בוודאות?

2. מספר ייקרא מיוחד אם יש לו 7 ספרות וסכום ספרותיו גדול ב-53 ממכפלת ספרותיו. כמה מספרים מיוחדים קיימים?



3. בציור שני משולשים שווי-צלעות ABC ו-DEF כך שאמצעי AC ו-EF מתלכדים, והנקודות A, C, E ו-F על אותו הישר. בנוסף נתון כי הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על

מעגל אחד. מצאו את $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}$.

4. אביב החביא מטמון באחת המשבצות של לוח משבצות 100×100 . ענבר יכול לשאול לגבי שורה או עמודה מסוימת, ואביב אומר לו "כן" אם המטמון נמצא בשורה/עמודה שענבר שאל לגביה או בשורה/עמודה סמוכה; אחרת אביב אומר לו "לא". מהו המספר המינימלי של שאלות שענבר צריך לשאול על מנת למצוא את המטמון בוודאות?

5. נתונה המשוואה $14a - 9b^2 = 17 = 54b - a^2 - 96$. מצאו את הערך של $a \cdot b$.

6. עבור מספר שלם חיובי n , מציירים על דף משבצות מלבן שמורכב מ- n משבצות שרוחבו 1 וגובהו n . מעבירים במלבן את האלכסון שמחבר את הקודקוד השמאלי התחתון לקודקוד הימני העליון. אלכסון זה מחלק את כל אחד מ- n המשבצות לשני חלקים: החלק השמאלי והחלק הימני. בתוך כל משבצת, נסתכל על יחס בין השטח של החלק השמאלי לשטח של החלק הימני: למשל, עבור $n = 2$, היחס במשבצת התחתונה הוא שליש ובמשבצת העליונה הוא 3. לכמה ערכי n , בין 1 ל-500 (כולל), היחס $3/5$ מופיע באחת המשבצות?

7. מצאו את כמות המספרים השלמים x בטווח $20000 \leq x \leq 40000$ המקיימים את התכונה הבאה: אם נוסיף ל- x משמאל את הספרות 11 נקבל מספר שמתחלק ב- x .

8. נתון משולש ABF . על הצלע BF סומנו נקודות C, D, E . סדר הנקודות על הצלע BF הוא B, C, D, E, F . הקטעים AC, AD, AE מחלקים את הזווית BAF לארבע זוויות שוות. נתון כי $BC = 7, CD = 8, DE = 17$. מצאו את אורך הקטע EF .

9. בני רוצה לרשום את כל המספרים הטבעיים מ-1 עד 16 במשבצות הטבלה 2×8 כך שכל שני מספרים עוקבים יימצאו במשבצות שיש להן צלע משותפת. בכמה דרכים שונות ניתן לעשות זאת?

10. סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 90$, ונוסחת נסיגה

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4} + \sqrt{a_n + \frac{1}{4}} - \sqrt{a_n + \frac{1}{4} + \sqrt{a_n + \frac{1}{4}}}$$

מצאו את a_{365} .

בהצלחה!