



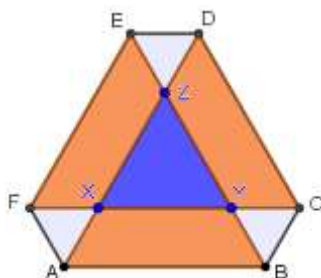
אולימפיאדה ארצית במתמטיקה תשפ"ד - שלב א'
תלמידי ט-יב – סבב ראשון מועד שני 20.9.2023

לפניכם שאלון מתמטי בן עשר שאלות. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן. המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית - IMO.

יש להזין את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק.
אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

שאלות:

1. נתונה טבלה שבשורה הראשונה שלה רשומים המספרים האי-זוגיים 1, 3, 5, ..., 19 ובעמודה הראשונה רשומים המספרים 1, 2, 4, 8, 16, 32. בהמשך ממלאים את הטבלה כמו לוח הכפל: בכל משבצת ריקה רושמים את המכפלה של המספר הראשון בשורה שלה והמספר הראשון בעמודה שלה. מצאו את סכום כל המספרים בטבלה.



2. במשושה ABCDEF, האלכסונים AD, BE ו-CF נפגשים בנקודות X, Y ו-Z ומחלקים את המשושה לשבעה חלקים: ארבעה משולשים משוכללים, ו-3 טרפזים חופפים. שטח המשולש XYZ שווה ל-9, והשטח של כל טרפז שווה ל-16. מצאו את שטח המשושה ABCDEF.

3. למנשה יש כספת המחולקת לאלף תאים הממוספרים מ-1 עד 1000. בכל אחד מהתאים יש מטבעות, ששווי כל אחד מהם הוא שקל אחד, שני שקלים, חמישה שקלים או עשרה שקלים. בתא מספר 1 הערך הכולל של המטבעות הוא 6 שקלים. בתא מספר 2 הערך הכולל הוא 12 שקלים. בתא מספר 3 הערך הכולל הוא 18 שקלים, וכן הלאה עד לתא מספר 1000 שבו הערך הכולל הוא 6000 שקלים. מהו מספר המטבעות הקטן ביותר שעשוי להיות בכספת בסך הכול?



4. כמה משולשים יש בצורה?

5. פתרו את המשוואה: $x = \sqrt{140 \cdot \sqrt{140x - 4900} - 4900}$.

6. בלוח משבצות 9 על 9 סומנו מספר משבצות כך שבכל מלבן שמורכב מ-8 משבצות וצלעותיו באורכים 2 ו-4 יש בדיוק משבצת מסומנת אחת. מצאו את המספר
א. הגדול ביותר האפשרי של משבצות מסומנות,
ב. הקטן ביותר האפשרי של משבצות מסומנות.

7. מצאו את כמות המספרים השלמים החיוביים שקטנים ממיליון, אשר ברישום שלהם מופיעות כל הספרות של המספר 24601. לדוגמה - המספר 140962 מכיל את כל הספרות של 24601.

8. אבי בני וגדי הם שלושה אנשים שהגילאים שלהם הם מספרים שלמים שונים זה מזה. יום אחד שלושתם נפגשו, וכל אחד מהם אמר שני משפטים:
אבי: "הצעיר יותר מבין שניכם צעיר ממני ב-5 שנים. המבוגר יותר מבין שניכם מבוגר ממני ב-8 שנים."
בני: "הצעיר יותר מבין שניכם צעיר ממני ב-8 שנים. המבוגר יותר מבין שניכם מבוגר ממני ב-10 שנים."
גדי: "הצעיר יותר מבין שניכם צעיר ממני ב-10 שנים. המבוגר יותר מבין שניכם מבוגר ממני ב-5 שנים."
ידוע שכל אחד מהם אמר משפט אחד נכון ומשפט אחד שגוי. מצאו את הגיל של גדי אם ידוע שסכום שלושת הגילאים שלהם הוא 77.

9. מספרים חיוביים x, y מקיימים

$$\begin{cases} x^2 + x^3 + x^4 + x^6 = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[6]{y} \\ y = 342 + x^6 \end{cases}$$

מצאו את y .

10. במצולע ABCDEFGHI נתון כי $\angle B = \angle E = \angle H = 120^\circ$, ובנוסף $\angle A = \angle C = \angle D = \angle F = \angle G = \angle I$. אורכי שש הצלעות שסמוכות לזוויות של 120° שווים ל- $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, והאורכים של שלוש הצלעות האחרות שווים ל- $2 \cdot \sqrt[4]{3}$. מצאו את השטח של המצולע.

בהצלחה!