

שלב ב' של האולימפיאדה הארצית במתמטיקה 15.9.2024

כתבו בדף התשובות המצורף את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק.
את התשובות יש לרשום באופן מפורש כמספרים, ללא פעולות חשבון ונוסחאות.
אין להשתמש במחשבון. משך המבחן: 180 דקות.

1. על דף לבן ציירו משושה קמור ומחומש קמור. מהו המספר הגדול ביותר של חלקים שאליהם הקווים בציור יכולים לחלק את הדף?

2. נתון כי $1 = \frac{1}{a} - \frac{a}{5} + \frac{3b}{5a} = \frac{1}{b} - \frac{b}{3} + \frac{7c}{3b} = \frac{1}{c} - \frac{c}{7} + \frac{5a}{7c}$. מצאו את $a^2 + b^2 + c^2$.

3. נתון לוח בגודל 10×10 . איילה רוצה לצבוע את משבצות הלוח בכחול ולבן (כל משבצת בצבע מסוים), כך שבכל ריבוע שמורכב מ-4 משבצות יהיו בדיוק שתי משבצות לבנות ושתי משבצות כחולות. בכמה דרכים שונות יכולה איילה לצבוע את המשבצות בהתאם לכללים האלה?

4. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של $\left(3 + \sqrt{289 - y^2} + x\right)^2 + \left(4 + \sqrt{64 - x^2} + y\right)^2$ בהנחה ש- $-8 \leq x \leq 8$, $-17 \leq y \leq 17$.

5. בכמה דרכים שונות ניתן לבחור 6 ספרות a, b, c, d, e, f שכולן שונות מ-0 (ולא בהכרח שונות זו מזו), כך שהמספר השש-ספרתי $ab00cd$ יתחלק במספר השש-ספרתי $cd00ef$?

6. נתון משולש ABC ומעגל עם רדיוס 10 שחותך כל אחד מהצלעות של המשולש בשתי נקודות: נקודות P ו-Q על הצלע BC, נקודות K ו-L על הצלע CA, ונקודות M ו-N על הצלע AB, כך שמתקיים $AM = MN = KL = PQ = 2PB = \frac{BC}{6}$. מצאו את שטח המשולש ABC.

7. מספר N יקרא מוצלח אם הוא מקיים את שני התנאים הבאים:

- N הוא מספר חיובי שלם שמתחלק ב-101,
- ברישום של N מופיעות בדיוק שתי ספרות לא אפסיות.

למשל המספר 2020 הוא מוצלח, ואילו המספר 12120 אינו מוצלח כי יש בו 4 ספרות לא אפסיות. מצאו את כמות המספרים המוצלחים שקטנים מ- 10^{40} .

8. עשרה מספרים שלמים רשומים במעגל. נתון כי הסכום בכל שלשה רצופה שווה ל-7 או ל-8 (לא בהכרח כל הסכומים זהים). מהו ההפרש הגדול ביותר האפשרי בין המספר הכי גדול לבין המספר הכי קטן במעגל?

בהצלחה!

דף תשובות

שם מלא		כתובת דואר אלקטרוני	
מספר טלפון		מספר תעודת זהות	

את התשובות יש לרשום באופן מפורש כמספרים, ללא פעולות חשבון ונוסחאות.

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	