2006 年 7 月 12 日

一、 设 I 为 ΔABC 的内心， P 是 ΔABC 内部的一点， 满足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

证明： $AP \geq AI$， 并说明等号成立的充分必要条件是 $P = I$.

二、 设 P 为正 2006 边形. 如果 P 的一条对角线的两端将 P 的边界分成两部分，每部分都包含 P 的奇数条边，那么该对角线称为“好边”. 规定 P 的每条边均为“好边”.

已知 2003 条在 P 内部不相交的对角线将 P 分割成若干三角形. 试问在这种分割之下，最多有多少个有两条“好边”的等腰三角形.

三、 求最小的实数 M， 使得对所有的实数 a, b 和 c， 有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

*时间：**4** 小时 **30** 分钟*
*每题 **7** 分*

2006 年 7 月 13 日

四、求所有的整数对 (x, y)， 使得

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

五、设 $P(x)$ 为 n 次（$n>1$）整系数多项式， k 是一个正整数. 考虑多项式 $Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$， 其中 P 出现 k 次. 证明：最多存在 n 个整数 t， 使得 $Q(t)=t$.

六、对于凸多边形 P 的任意边 b，以 b 为边，在 P 内部作一个面积最大的三角形. 证明: 对 P 的每条边， 按上述方法所得三角形的面积之和至少是 P 的面积的 2 倍.

*时间：**4** 小时 **30** 分钟*
*每题 **7** 分*