

2006 年 7 月 12 日

一、 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心， P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点， 满足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

证明： $AP \geq AI$ ， 并说明等号成立的充分必要条件是 $P = I$ 。

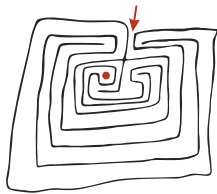
二、 设 P 为正 2006 边形。 如果 P 的一条对角线的两端将 P 的边界分成两部分， 每部分都包含 P 的奇数条边， 那么该对角线称为“好边”。 规定 P 的每条边均为“好边”。

已知 2003 条在 P 内部不相交的对角线将 P 分割成若干三角形。 试问在这种分割之下， 最多有多少个有两条“好边”的等腰三角形。

三、 求最小的实数 M ， 使得对所有的实数 a, b 和 c ， 有

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

时间： 4 小时 30 分钟
每题 7 分



2006 年 7 月 13 日

四、求所有的整数对 (x, y) ，使得

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

五、设 $P(x)$ 为 n 次 ($n > 1$) 整系数多项式, k 是一个正整数. 考虑多项式 $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, 其中 P 出现 k 次. 证明: 最多存在 n 个整数 t , 使得 $Q(t) = t$.

六、对于凸多边形 P 的任意边 b , 以 b 为边, 在 P 内部作一个面积最大的三角形. 证明: 对 P 的每条边, 按上述方法所得三角形的面积之和至少是 P 的面积的 2 倍.

时间: 4 小时 30 分钟
每题 7 分