

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

יום רביעי 16 ביולי, 2008

בעיה 1. נקודת מפגש הגבהים של המשולש החד-זוויות ABC היא H . המעגל העובר דרך H ומרכזו בנקודת האמצע של הקטע BC חותך את הישר BC בנקודות A_1 ו A_2 . באופן דומה, המעגל העובר דרך H ומרכזו בנקודת האמצע של הקטע CA חותך את הישר CA בנקודות B_1 ו B_2 , והמעגל העובר דרך H ומרכזו בנקודת האמצע של הקטע AB חותך את הישר AB בנקודות C_1 ו C_2 . הראה כי הנקודות $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ נמצאות על מעגל אחד.

בעיה 2. (a) הוכח כי

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

עבור כל המספרים הממשיים x, y, z השונים כל אחד מ 1 , והמקיימים את התנאי $xyz = 1$.

(b) הוכח כי קיים מספר אינסופי של שלשות של מספרים רציונליים x, y, z השונים כל אחד מ 1 , והמקיימים את התנאי $xyz = 1$, אשר עבורן מתקיים שוויון באי השוויון למעלה.

בעיה 3. הוכח כי קיים מספר אינסופי של מספרים שלמים חיוביים n כך שלמספר $n^2 + 1$ יש מחלק ראשוני גדול מ $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

יום חמישי 17 ביולי, 2008

בעיה 4. מצא את כל הפונקציות $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (כלומר f היא פונקציה מקבוצת המספרים הממשיים החיוביים לקבוצת המספרים הממשיים החיוביים) כך ש

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

עבור על המספרים הממשיים החיוביים w, x, y, z המקיימים $wx = yz$.

בעיה 5. יהיו n ו- k מספרים שלמים חיוביים כך ש $k \geq n$ ו- $k - n$ הוא מספר זוגי. נתונות $2n$ נורות המוספרות $1, 2, \dots, 2n$. כל נורה יכולה להיות במצב כבוי או דולק. בתחילה, כל הנורות נמצאות במצב כבוי. נתבונן בסדרות של צעדים: בכל צעד מחליפים את מצבה של נורה אחת (ממצב כבוי למצב דולק או ממצב דולק למצב כבוי).

יהי N המספר של סדרות הצעדים המכילות k צעדים ומובילות למצב הסופי שבו כל הנורות 1 עד n נמצאות במצב דולק, וכל הנורות $n + 1$ עד $2n$ נמצאות במצב כבוי.

יהי M המספר של סדרות הצעדים המכילות k צעדים ומובילות למצב הסופי שבו כל הנורות 1 עד n נמצאות במצב דולק, וכל הנורות $n + 1$ עד $2n$ נמצאות במצב כבוי, אבל אף אחת מהנורות $n + 1$ עד $2n$ לא הודלקה במהלך סדרת הצעדים.

מצא את היחס N/M .

בעיה 6. יהי $ABCD$ מרובע קמור שבו $|BA| \neq |BC|$. נסמן את המעגל החסום במשולש ABC ואת המעגל החסום במשולש ADC ב- ω_1 ו- ω_2 בהתאמה. נניח כי קיים מעגל ω המשיק לקרן BA בנקודה הנמצאת מעבר ל- A , ומשיק לקרן BC בנקודה הנמצאת מעבר ל- C , וכמו כן משיק לישרים AD ו- CD . הוכח כי המשיקים המשותפים החיצוניים של המעגלים ω_1 ו- ω_2 נחתכים על ω .