Language: **Chinese (Simplified)** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008年7月16日，星期三

1. 已知 H 是锐角三角形 ABC 的垂心，以边 BC 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 BC 相交于两点 A_1, A_2；以边 CA 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 CA 相交于两点 B_1, B_2；以边 AB 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 AB 相交于两点 C_1, C_2. 证明：六点 A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 共圆.

2. （a）设实数 x，y，z 都不等于 1，满足 $xyz=1$，求证：

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1.$$

（b）证明：存在无穷多组三元有理数组（x，y，z），x，y，z 都不等于 1，且 $xyz=1$，使得上述不等式等号成立.

3、证明：存在无穷多个正整数 n，使得 n^2+1 有一个大于 $2n+\sqrt{2n}$ 的质因子.

Language: Simplified Chinese

*考试时间：**4** 小时 **30** 分*
*每题 **7** 分*

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008年7月17日，星期四

4. 求所有的函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$， 满足对所有的正实数 w，x，y，z，$wx=yz$，都有

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}.$$

5. 设 n 和 k 是正整数，$k\geq n$，且 $k-n$ 是一个偶数. $2n$ 盏灯依次编号为 1，2，…，$2n$，每一盏灯可以“开”和“关”. 开始时，所有的灯都是“关”的. 对这些灯可进行操作，每一次操作只改变其中的一盏灯的开关状态（即“开”变成“关”，“关”变成“开”），我们考虑长度为 k 的操作序列，序列中的第 i 项就是第 i 次操作时被改变开关状态的那盏灯的编号.

设 N 是 k 次操作后使得灯 1，…，n 是“开”的，灯 $n+1$，…，$2n$ 是“关”的状态的所有不同的操作序列的个数.

设 M 是 k 次操作后使得灯 1，…，n 是“开”的，灯 $n+1$，…，$2n$ 是“关”的，但是灯 $n+1$，…，$2n$ 始终没有被开过的所有不同的操作序列的个数.

求比值 $\dfrac{N}{M}$.

6. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$BA\neq BC$. ω_1 和 ω_2 分别是△ABC 和△ADC 的内切圆. 假设存在一个圆 ω 与射线 BA 相切（切点不在线段 BA 上），与射线 BC 相切（切点不在线段 BC 上），且与直线 AD 和直线 CD 都相切. 证明：圆 ω_1 和 ω_2 的两条外公切线的交点在圆 ω 上.