

Wednesday, July 15, 2009
יום רביעי 15 ביולי, 2009

בעיה 1. יהי n מספר חיובי שלם, ויהיו $a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) מספרים שלמים שונים זה מזה מתוך הקבוצה $\{1, \dots, n\}$, כך ש- n מחלק את $a_i(a_{i+1}-1)$ עבור $i = 1, \dots, k-1$. הוכח כי n אינו מחלק את $a_k(a_1-1)$.

בעיה 2. יהי ABC משולש שמרכז המעגל החוסם אותו הוא O . הנקודות P ו- Q הן נקודות פנימיות של הצלעות AB ו- CA , בהתאמה. יהיו K, L ו- M נקודות האמצע של הקטעים BP, CQ ו- PQ , בהתאמה. יהיה Γ המעגל העובר דרך K, L ו- M . נניח כי הישר PQ משיק למעגל Γ . הוכח כי $OP = OQ$.

בעיה 3. נניח כי $s_1, s_2, s_3, \dots$ היא סדרה עולה ממש של מספרים שלמים חיוביים, כך ששתי התת-סדרות

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{ו} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

הן סדרות חשבוניות. הוכח כי הסדרה $s_1, s_2, s_3, \dots$ היא בעצמה סדרה חשבונית.

Thursday, July 16, 2009
יום חמישי 16 ביולי, 2009

בעיה 4. יהי ABC משולש שבו $AB = AC$. חוצי הזווית של הזווית $\angle CAB$ ו- $\angle ABC$ פוגשים את הצלעות BC ו- CA ב- D וב- E , בהתאמה. יהי K מרכז המעגל החסום במשולש ADC . נניח כי $\angle BEK = 45^\circ$. מצא את כל הערכים האפשריים עבור $\angle CAB$.

בעיה 5. מצא את כל הפונקציות f מקבוצת המספרים השלמים החיוביים לקבוצת המספרים השלמים החיוביים, כך שעבור כל שני מספרים שלמים חיוביים a ו- b קיים משולש לא מנוון שצלעותיו הן באורכים

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1)$$

(משולש לא מנוון הוא משולש שקודקדיו אינם נמצאים על ישר אחד)

בעיה 6. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים שלמים חיוביים שונים זה מזה, ותהי M קבוצה של $n-1$ מספרים שלמים חיוביים שאינה מכילה את $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. תָּגֵב צריך לקפוץ לאורך הציר הממשי, החל מהנקודה 0, ולבצע n קפיצות ימינה בקפיצות באורכים $a_1, a_2, \dots, a_n$ בסדר כלשהו. הוכח ניתן לבחור את סדר אורכי הקפיצות באופן שהחגב לא ינחת לעולם על נקודה מתוך M .

Language: Hebrew (Israel)

הזמן המוקצב: 4 שעות וחצי
כל שאלה שווה 7 נקודות