

2009年7月15日, 星期三

1. 设 n 是一个正整数, a_1, a_2, \dots, a_k ($k \geq 2$) 是集合 $\{1, \dots, n\}$ 中的互不相同的整数, 使得对于 $i = 1, \dots, k-1$, 都有 n 整除 $a_i(a_{i+1}-1)$. 证明: n 不整除 $a_k(a_1-1)$.

2. 设 O 是三角形 ABC 的外心. 点 P 和 Q 分别是边 CA 和 AB 的内点. 设 K, L 和 M 分别是线段 BP, CQ 和 PQ 的中点, Γ 是过点 K, L 和 M 的圆. 若直线 PQ 与圆 Γ 相切, 证明: $OP = OQ$.

3. 设 s_1, s_2, s_3, \dots 是一个严格递增的正整数数列, 使得它的两个子数列

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{和} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

都是等差数列. 证明: 数列 s_1, s_2, s_3, \dots 本身也是一个等差数列.

2009年7月16日, 星期四

4. 在三角形 ABC 中, $AB = AC$, $\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 的内角平分线分别与边 BC 和 CA 相交于点 D 和 E . 设 K 是三角形 ADC 的内心. 若 $\angle BEK = 45^\circ$, 求 $\angle CAB$ 所有可能的值.

5. 求所有从正整数集到正整数集上的满足如下条件的函数 f : 对所有正整数 a 和 b , 都存在一个以

$$a, f(b) \text{ 和 } f(b + f(a) - 1)$$

为三边长的非退化三角形.

(称一个三角形为非退化三角形是指它的三个顶点不共线.)

6. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是互不相同的正整数. M 是有 $n-1$ 个元素的正整数集, 且不含数 $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. 一只蚱蜢沿着实数轴从原点 0 开始向右跳跃 n 步, 它的跳跃距离是 a_1, a_2, \dots, a_n 的某个排列. 证明: 可以选择一种排列, 使得蚱蜢跳跃落下的点所表示的数都不在集 M 中.