



Wednesday, July 7, 2010

יום רביעי 7 ביולי, 2010

בעיה 1. מצא את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שהשוויון

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

יתקיים לכל $x, y \in \mathbb{R}$. (כאן, הסימן $\lfloor z \rfloor$ מציין את המספר השלם הגדול ביותר הקטן או שווה ל- z).

בעיה 2. יהי I מרכז המעגל החסום של המשולש ABC , ויהי Γ המעגל החוסם את המשולש. נניח כי הישר AI חותך את המעגל Γ שנית בנקודה D . תהי E נקודה על הקשת $\widehat{BDC}$, ותהי F נקודה על הצלע BC כך ש

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC$$

לבסוף, תהי G אמצע הקטע IF . הוכח כי הישרים DG ו- EI נחתכים על המעגל Γ .

בעיה 3. תהי N קבוצת כל המספרים השלמים והחיוביים. מצא את כל הפונקציות $g: N \rightarrow N$ כך ש

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

הוא ריבוע שלם עבור כל $m, n \in N$.



Thursday, July 8, 2010

יום חמישי 8 ביולי, 2010

בעיה 4. תהי P נקודה בתוך המשולש ABC . הישרים AP, BP, CP חותכים את המעגל Γ , שהוא המעגל החוסם של המשולש ABC , שוב, בנקודות K, L, M , בהתאמה. המשיק למעגל Γ בנקודה C חותך את הישר AB בנקודה S . נניח כי $SC=SP$. הוכח כי $MK=ML$.

בעיה 5. בתוך כל אחת משש התיבות $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ יש בהתחלה מטבע אחת. מותר לבצע שני סוגים של פעולות:

פעולה מסוג 1: בחר תיבה לא ריקה B_j עבור $1 \leq j \leq 5$. הוצא מטבע אחת מתוך תיבה B_j והוסף שתי מטבעות לתיבה B_{j+1} .

פעולה מסוג 2: בחר תיבה לא ריקה B_k עבור $1 \leq k \leq 4$. הוצא מטבע אחת מתוך תיבה B_k והחלף את התוכן (שיכול להיות ריק) של תיבות B_{k+1} ו B_{k+2} .

קבע אם קיימת סדרה סופית של פעולות מהסוג הנזכר לעיל, כך שבסופה יהיו התיבות B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ריקות, ותיבה B_6 תכיל בדיוק 2010^{2010} מטבעות. (שים לב כי $a^{b^c} = a^{(b^c)}$)

בעיה 6. תהי $a_1, a_2, a_3, \dots$ סדרת מספרים ממשיים חיוביים. נניח כי עבור מספר שלם חיובי כלשהו s , מתקיים

$$a_n = \max \{ a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1 \}$$

עבור כל $n > s$.

הוכח כי קיימים מספרים שלמים חיוביים N ו $\ell \leq s$ וכך ש $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ לכל $n \geq N$.