2010年7月7日，星期三

1. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ，使得等式

$$f\left(\left[x\right]y\right)=f(x)\left[f(y)\right]$$

对所有 $x, y\in\mathbb{R}$成立.（这里，$\left[z\right]$表示不超过实数 z 的最大整数.）

2. 设三角形 ABC 的内心是 I，外接圆为Γ. 直线 AI 交圆Γ于另一点 D. 设 E 是弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 上的一点, F 是边 BC 上的一点，使得

$$\angle BAF=\angle CAE<\frac{1}{2}\angle BAC .$$

设 G 是线段 IF 的中点. 证明：直线 DG 与 EI 的交点在圆Γ上.

3. 设$\mathbb{N}$是所有正整数构成的集合. 求所有的函数 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对所有 $m,n\in\mathbb{N}$，

$$\left(g(m)+n\right)\left(m+g(n)\right)$$

是一个完全平方数.

考试时间：4小时30分
每题7分

2010年7月8日，星期四

4. 设 $\boldsymbol{P}$ 是三角形 $\boldsymbol{ABC}$ 内部的一点，直线 $\boldsymbol{AP}$，$\boldsymbol{BP}$，$\boldsymbol{CP}$ 与三角形 $\boldsymbol{ABC}$ 的外接圆 Γ 的另一个交点分别为 $\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{M}$. 圆 Γ 在点 $\boldsymbol{C}$ 处的切线与直线 $\boldsymbol{AB}$ 相交于点 $\boldsymbol{S}$. 假设 $\boldsymbol{SC}=\boldsymbol{SP}$，证明: $\boldsymbol{MK}=\boldsymbol{ML}$.

5. 有 6 个盒子 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4,\boldsymbol{B}_5,\boldsymbol{B}_6$，开始时每个盒子中都恰好有一枚硬币. 每次可以任意选择如下两种方式之一对它们进行操作：

方式 1：选取一个至少有一枚硬币的盒子 $\boldsymbol{B}_j(1\le \boldsymbol{j}\le 5)$，从盒子 $\boldsymbol{B}_j$ 中取走一枚硬币，并在盒子 $\boldsymbol{B}_{j+1}$ 中加入 2 枚硬币.

方式 2：选取一个至少有一枚硬币的盒子 $\boldsymbol{B}_k(1\le \boldsymbol{k}\le 4)$，从盒子 $\boldsymbol{B}_k$ 中取走一枚硬币，并且交换盒子 $\boldsymbol{B}_{k+1}$(可能是空盒)与盒子 $\boldsymbol{B}_{k+2}$(可能是空盒)中的所有硬币.

问：是否可以进行若干次上述操作，使得盒子 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4,\boldsymbol{B}_5$ 中没有硬币，而盒子 $\boldsymbol{B}_6$ 中恰好有 $2010^{2010^{2010}}$ 枚硬币？（注：$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{c}}}=\boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{c}})}$.）

6. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots$ 是一个正实数数列. 假设存在某个固定的正整数 $\boldsymbol{s}$，使得对所有的 $\boldsymbol{n}>\boldsymbol{s}$，有

$$\boldsymbol{a}_n=\max\left\{\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_{n-k}\,\middle|\,1\le \boldsymbol{k}\le \boldsymbol{n}-1\right\}.$$

证明：存在正整数 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{l}\le \boldsymbol{s}$，使得对所有的 $\boldsymbol{n}\ge \boldsymbol{N}$ 都有 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_l+\boldsymbol{a}_{n-l}$.

考试时间：4 小时 30 分
每题 7 分