

2011年7月18日，星期一

1. 对任意由 4 个不同正整数组成的集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ，记 $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ，设 n_A 是满足 $a_i + a_j (1 \leq i < j \leq 4)$ 整除 s_A 的数对 (i, j) 的个数。求所有由 4 个不同正整数组成的集合 A ，使得 n_A 达到最大值。

2. 设 S 是平面上包含至少两个点的一个有限点集，其中没有三点在同一条直线上。

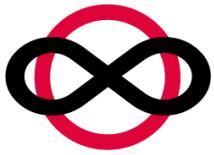
所谓一个“风车”是指这样一个过程：从经过 S 中单独一点 P 的一条直线 ℓ 开始，以 P 为旋转中心顺时针旋转，直至首次遇到 S 中的另一点，记为点 Q 。接着这条直线以 Q 为新的旋转中心顺时针旋转，直到再次遇到 S 中的某一点，这样的过程无限持续下去。

证明：可以适当选取 S 中的一点 P ，以及过 P 的一条直线 ℓ ，使得由此产生的“风车”将 S 中的每一点都无限多次用作旋转中心。

3. 设 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个定义在实数集上的实值函数，满足对所有实数 x, y ，都有

$$f(x+y) \leq y f(x) + f(f(x)),$$

证明：对所有实数 $x \leq 0$ ，有 $f(x) = 0$ 。



2011年7月19日，星期二

4. 给定整数 $n > 0$. 有一个天平和 n 个重量分别为 $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ 的砝码.

现通过 n 步操作逐个将所有砝码都放上天平, 使得在操作过程中, 右边的重量总不超过左边的重量. 每一步操作是从尚未放上天平的砝码中选择一个砝码, 将其放到天平的左边或右边, 直至所有砝码都被放上天平.

求整个操作过程的不同方法个数.

5. 设 f 是一个定义在整数集上取值为正整数的函数, 已知对任意两个整数 m, n , 差 $f(m) - f(n)$ 能被 $f(m-n)$ 整除. 证明: 对所有整数 m, n , 若 $f(m) \leq f(n)$, 则 $f(n)$ 被 $f(m)$ 整除.

6. 设锐角三角形 ABC 的外接圆为 Γ , ℓ 是圆 Γ 的一条切线. 记切线 ℓ 关于直线 BC , CA 和 AB 的对称直线分别为 ℓ_a , ℓ_b 和 ℓ_c . 证明: 由直线 ℓ_a , ℓ_b 和 ℓ_c 构成的三角形的外接圆与圆 Γ 相切.