53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Hebrew**

Day: **1**

יום שלישי, 10 ביולי, 2012

שאלה 1. נתון משולש ABC. הנקודה J היא מרכז המעגל החסום מבחוץ המנוגד לקדקוד A. מעגל זה משיק לצלע BC בנקודה M, ולישרים AB ו- AC בנקודות K ו- L בהתאמה. הישרים LM ו- BJ נחתכים בנקודה F, והישרים KM ו- CJ נחתכים בנקודה G. תהא S נקודת חיתוך הישרים AF ו- BC, ותהא T נקודת חיתוך הישרים AG ו- BC.

הוכיחו כי M היא אמצע הקטע ST.

(המעגל החסום מבחוץ המנוגד לקדקוד A הינו המעגל המשיק לצלע BC ולהמשכי הצלעות AC ו- AB.)

שאלה 2. יהא $n \ge 3$ מספר שלם, ויהיו $a_2, a_3, \ldots, a_n$ מספרים ממשיים חיוביים, המקיימים $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$.

הוכיחו כי

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$

שאלה 3. A ו-B משחקים במשחק **שקרים וניחושים**. כללי המשחק תלויים בשני מספרים שלמים חיוביים, k ו- n, הידועים לשני השחקנים.

בתחילת המשחק A בוחר מספרים שלמים x ו- N עבורם $1 \le x \le N$. A מגלה ל-B בכנות את הערך של המספר N, ושומר את הערך של x בסוד. השחקן B מנסה לגלות מידע לגבי x באמצעות שאלות מהסוג הבא: בכל שאלה B מגדיר קבוצה S כלשהי של שלמים חיוביים (תיתכן גם קבוצה שהוגדרה בשאלות קודמות), ושואל את A האם x שייך לקבוצה S. B רשאי לשאול כל כמות שאלות מסוג זה כרצונו. לאחר כל שאלה, A חייב לענות מיידית באמצעות "כן" או "לא", אבל הוא רשאי לשקר. אין מגבלה על כמות התשובות השקריות של A, אך בכל $k+1$ תשובות עוקבות, לפחות אחת חייבת להיות כנה.

לאחר ש-B סיים לשאול את כל השאלות שהוא רוצה, הוא חייב להגדיר קבוצה X של מספרים שלמים חיוביים, בעלת n איברים לכל היותר. B מנצח אם x שייך ל- X; אחרת, B מפסיד. הוכיחו כי:

א. אם $n \ge 2^k$, אז B יכול להבטיח לעצמו ניצחון.

ב. לכל k גדול מספיק, קיים $n \ge 1.99^k$ שלם עבורו B לא יכול להבטיח לעצמו ניצחון.

Language: **Hebrew**

Day: 2

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

יום רביעי, 11 ביולי, 2012

שאלה 4. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ עבורן לכל שלושה שלמים a,b,c המקיימים $a+b+c=0$, מתקיימת הזהות

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

(כאן $\mathbb{Z}$ מסמן את קבוצת כל המספרים השלמים.)

שאלה 5. יהא ABC משולש בו $\measuredangle ACB=90^\circ$, ויהא D עקב הגובה מ-C. תהא X נקודה על הקטע הפתוח CD. תהא K הנקודה על הקטע AX עבורה $BK=BC$. בדומה, תהא L הנקודה על הקטע BX עבורה $AL=AC$. תהא M נקודת החיתוך של AL ו-BK.
הוכיחו כי $MK=ML$.

שאלה 6. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם קיימים שלמים אי-שליליים $a_1,a_2,\ldots,a_n$ המקיימים

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$