

יום שלישי, 23 ביולי, 2013

שאלה 1. הוכח כי לכל זוג מספרים שלמים חיוביים k ו- n , קיימים k מספרים שלמים חיוביים $m_1, m_2, \dots, m_k$ (לא בהכרח שונים) כך שמתקיים

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

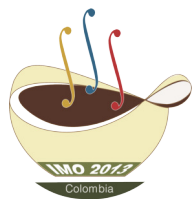
שאלה 2. קונפיגורציה של 4027 נקודות במישור נקראת **קולומביאנית** אם היא מורכבת מ-2013 נקודות אדומות ו-2014 נקודות כחולות, ואף שלוש נקודות בקונפיגורציה אינן על ישר אחד. מעבירים מספר ישרים, אשר מחלקים את המישור למספר אזורים. אוסף של ישרים נקרא **טוב** עבור קונפיגורציה קולומביאנית מסוימת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

- אף ישר אינו עובר דרך אף נקודה בקונפיגורציה;
- אף אזור לא מכיל נקודות משני הצבעים.

מצא את הערך הקטן ביותר של k עבורו לכל קונפיגורציה קולומביאנית של 4027 נקודות, קיים אוסף טוב של k ישרים.

שאלה 3. המעגל החסום מבחוץ של משולש ABC המנוגד לקדקוד A משיק לצלע BC בנקודה A_1 . הנקודות B_1 על CA ו- C_1 על AB מוגדרות בצורה דומה, באמצעות המעגלים המשיקים מבחוץ המנוגדים ל- B ול- C בהתאמה. נניח כי מרכז המעגל החסום של משולש $A_1B_1C_1$ נמצא על המעגל החסום של משולש ABC . הוכח כי ABC הינו משולש ישר-זווית.

המעגל **החסום מבחוץ** המנוגד לקדקוד A הינו המעגל המשיק לצלע BC ולהמשכי הצלעות AC ו- AB . המעגלים החסומים מבחוץ המנוגדים ל- B ול- C מוגדרים באופן דומה.



יום רביעי, 24 ביולי, 2013

שאלה 4. תהא H נקודת חיתוך הגבהים של משולש חד-זוויות ABC , ותהא W נקודה פנימית בקטע BC . הנקודות M ו- N הן עקבי הגבהים מ- B ומ- C , בהתאמה. נסמן ב- ω_1 את המעגל החוסם של BWN , ונסמן ב- X את הנקודה על ω_1 כך ש- WX הינו קוטר של ω_1 . באופן דומה, נסמן ב- ω_2 את המעגל החוסם של CWM , ונסמן ב- Y את הנקודה על ω_2 כך ש- WY הינו קוטר של ω_2 . הוכח כי הנקודות X, Y ו- H הינן על ישר אחד.

שאלה 5. תהא $\mathbb{Q}_{>0}$ קבוצת המספרים הרציונליים החיוביים. תהא $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

- (i) לכל $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, מתקיים $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
 - (ii) לכל $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, מתקיים $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
 - (iii) קיים מספר רציונלי $a > 1$ עבורו $f(a) = a$.
- הוכח כי $f(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

שאלה 6. יהא $n \geq 3$ מספר שלם, ונתבונן במעגל שעליו ממוקמות $n+1$ נקודות במרווחים שווים. נתבונן בכל הדרכים לסמן את הנקודות באמצעות המספרים $0, 1, \dots, n$ כך שכל מספר מופיע בדיוק פעם אחת. שני סימונים נחשבים זהים, אם אחד מתקבל מהשני על ידי סיבוב של המעגל. סימון נקרא **יפהפה** אם לכל ארבעה מספרים $a < b < c < d$ המקיימים $a + d = b + c$, המיתר המחבר את הנקודות המסומנות a ו- d לא נחתך עם המיתר המחבר את הנקודות המסומנות b ו- c . נסמן ב- M את מספר הסימונים היפהפיים, ונסמן ב- N את מספר הזוגות הסדורים של שלמים חיוביים (x, y) המקיימים $x + y \leq n$ וכן $\gcd(x, y) = 1$. הוכח כי $M = N + 1$.