2013 年 7 月 23 日, 星期二

第 1 题. 证明对于任意一对正整数 k 和 n, 都存在 k 个 (不必不相同的) 正整数 $m_1, m_2, \ldots, m_k$, 使得

$$1+\frac{2^k-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

第 2 题. 平面上的 4027 个点称为是一个*哥伦比亚式点集*, 如果其中任意三点不共线, 且有 2013 个点是红色的, 2014 个点是蓝色的. 在平面上画出一组直线, 可以将平面分成若干区域. 如果一组直线对于一个哥伦比亚式点集满足下述两个条件, 我们就称这是一个*好直线组*:

- 这些直线不经过该哥伦比亚式点集中的任何一个点;
- 每个区域中都不会同时出现两种颜色的点.

求 k 的最小值, 使得对于任意的哥伦比亚式点集, 都存在由 k 条直线构成的好直线组.

第 3 题. 设三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切圆与边 BC 相切于点 A_1 . 类似地, 分别用顶点 B 和顶点 C 所对的旁切圆定义 CA 边上的点 B_1 和 AB 边上的点 C_1. 假设三角形 $A_1B_1C_1$ 的外接圆圆心在三角形 ABC 的外接圆上. 证明：三角形 ABC 是直角三角形.

三角形 ABC 的顶点 A 所对的 旁切圆 是指与边 BC 相切，并且与边 AB, AC 的延长线相切的圆. 顶点 B，C 所对的旁切圆可类似定义.

2013 年 7 月 24 日, 星期三

第 4 题. 设三角形 ABC 是一个锐角三角形, 其垂心为 H, 设 W 是边 BC 上一点, 与顶点 B,C 均不重合. M 和 N 分别是过顶点 B 和 C 的高的垂足. 记三角形 BWN 的外接圆为 ω_1, 设 X 是 ω_1 上一点, 且 WX 是 ω_1 的直径. 类似地, 记三角形 CWM 的外接圆为 ω_2, 设 Y 是 ω_2 上一点, 且 WY 是 ω_2 的直径. 证明: 点 X, Y 和 H 共线.

第 5 题. 记 $\mathbb{Q}_{>0}$ 是所有正有理数组成的集合. 设函数 $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ 满足如下三个条件:

(i) 对所有的 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, 都有 $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) 对所有的 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, 都有 $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) 存在有理数 $a > 1$, 使得 $f(a) = a$.

证明: 对所有的 $x \in \mathbb{Q}_{>0}$, 都有 $f(x) = x$.

第 6 题. 设整数 $n \geq 3$, 在圆周上有 $n+1$ 个等分点. 用数 $0, 1, \ldots, n$ 标记这些点, 每个数字恰好用一次. 考虑所有可能的标记方式; 如果一种标记方式可以由另一种标记方式通过圆的旋转得到, 那么认为这两种标记方式是同一个. 一种标记方式称为是 *漂亮的*, 如果对于任意满足 $a+d = b+c$ 的四个标记数 $a < b < c < d$, 连接标 a 和 d 的点的弦与连接标 b 和 c 的点的弦都不相交.

设 M 是漂亮的标记方式的总数, 又设 N 是满足 $x+y \leq n$, 且 $\gcd(x,y) = 1$ 的有序正整数对 (x,y) 的个数. 证明:

$$M = N + 1.$$