

2013 年 7 月 23 日, 星期二

**第 1 题.** 证明对于任意一对正整数  $k$  和  $n$ , 都存在  $k$  个 (不必不相同的) 正整数  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , 使得

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

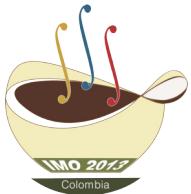
**第 2 题.** 平面上的 4027 个点称为是一个哥伦比亚式点集, 如果其中任意三点不共线, 且有 2013 个点是红色的, 2014 个点是蓝色的. 在平面上画出一组直线, 可以将平面分成若干区域. 如果一组直线对于一个哥伦比亚式点集满足下述两个条件, 我们就称这是一个好直线组:

- 这些直线不经过该哥伦比亚式点集中的任何一个点;
- 每个区域中都不会同时出现两种颜色的点.

求  $k$  的最小值, 使得对于任意的哥伦比亚式点集, 都存在由  $k$  条直线构成的好直线组.

**第 3 题.** 设三角形  $ABC$  的顶点  $A$  所对的旁切圆与边  $BC$  相切于点  $A_1$ . 类似地, 分别用顶点  $B$  和顶点  $C$  所对的旁切圆定义  $CA$  边上的点  $B_1$  和  $AB$  边上的点  $C_1$ . 假设三角形  $A_1B_1C_1$  的外接圆圆心在三角形  $ABC$  的外接圆上. 证明: 三角形  $ABC$  是直角三角形.

三角形  $ABC$  的顶点  $A$  所对的旁切圆是指与边  $BC$  相切, 并且与边  $AB$ ,  $AC$  的延长线相切的圆. 顶点  $B$ ,  $C$  所对的旁切圆可类似定义.



2013 年 7 月 24 日, 星期三

**第 4 题.** 设三角形  $ABC$  是一个锐角三角形, 其垂心为  $H$ , 设  $W$  是边  $BC$  上一点, 与顶点  $B, C$  均不重合.  $M$  和  $N$  分别是过顶点  $B$  和  $C$  的高的垂足. 记三角形  $BWN$  的外接圆为  $\omega_1$ , 设  $X$  是  $\omega_1$  上一点, 且  $WX$  是  $\omega_1$  的直径. 类似地, 记三角形  $CWM$  的外接圆为  $\omega_2$ , 设  $Y$  是  $\omega_2$  上一点, 且  $WY$  是  $\omega_2$  的直径. 证明: 点  $X, Y$  和  $H$  共线.

**第 5 题.** 记  $\mathbb{Q}_{>0}$  是所有正有理数组成的集合. 设函数  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  满足如下三个条件:

- (i) 对所有的  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ , 都有  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) 对所有的  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ , 都有  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii) 存在有理数  $a > 1$ , 使得  $f(a) = a$ .

证明: 对所有的  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ , 都有  $f(x) = x$ .

**第 6 题.** 设整数  $n \geq 3$ , 在圆周上有  $n+1$  个等分点. 用数  $0, 1, \dots, n$  标记这些点, 每个数字恰好用一次. 考虑所有可能的标记方式; 如果一种标记方式可以由另一种标记方式通过圆的旋转得到, 那么认为这两种标记方式是同一个. 一种标记方式称为是漂亮的, 如果对于任意满足  $a+d = b+c$  的四个标记数  $a < b < c < d$ , 连接标  $a$  和  $d$  的点的弦与连接标  $b$  和  $c$  的点的弦都不相交.

设  $M$  是漂亮的标记方式的总数, 又设  $N$  是满足  $x+y \leq n$ , 且  $\gcd(x, y) = 1$  的有序正整数对  $(x, y)$  的个数. 证明:

$$M = N + 1.$$