Language: **Hebrew**

Day: **1**

יום שלישי, 8 ביולי, 2014

שאלה 1. תהא $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ סדרה אינסופית של שלמים חיוביים. הוכח שקיים ויחיד $n \geq 1$ שלם עבורו

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

שאלה 2. יהא $n \geq 2$ מספר שלם. נתבונן בלוח שח $n \times n$ שמורכב מ-n^2 משבצות. קונפיגורציה של n צריחים על הלוח נקראת **שלווה** אם כל שורה וכל עמודה מכילה צריח אחד בדיוק. מצא את השלם החיובי הגדול ביותר k, עבורו לכל קונפיגורציה שלווה של n צריחים, קיים ריבוע $k \times k$ שמורכב מ-k^2 משבצות ולא מכיל אף צריח.

שאלה 3. במרובע קמור $ABCD$ מתקיים $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 90^\circ$. הנקודה H היא עקב האנך מ-A ל-BD. הנקודות S ו-T נמצאות על הצלעות AB ו-AD בהתאמה, כך ש-H נמצאת בתוך המשולש SCT, וכן

$$\measuredangle CHS - \measuredangle CSB = 90^\circ, \quad \measuredangle THC - \measuredangle DTC = 90^\circ.$$

הוכח כי הישר BD משיק למעגל החוסם של המשולש TSH.

יום רביעי, 9 ביולי, 2014

שאלה 4. הנקודות P ו-Q נמצאות על צלע BC של משולש חד-זוויות ABC, כך ש-$\measuredangle PAB = \measuredangle BCA$ וכן $\measuredangle CAQ = \measuredangle ABC$. הנקודות M ו-N נמצאות על הישרים AP ו-AQ בהתאמה, כך ש-P היא אמצע הקטע AM, ו-Q היא אמצע הקטע AN. הוכח כי נקודת חיתוך הישרים BM ו-CN נמצאת על המעגל החוסם של המשולש ABC.

שאלה 5. לכל שלם חיובי n, בנק קייפטאון מנפיק מטבעות בשווי $\frac{1}{n}$. נתון אוסף סופי של מטבעות כאלו (לא בהכרח בעלי שווי שונה) עם ערך כולל שאינו עולה על $99+\frac{1}{2}$. הוכח כי ניתן לחלק את האוסף ל-100 קבוצות או פחות, כך שהערך הכולל של כל קבוצה הינו 1 לכל היותר.

שאלה 6. קבוצת ישרים במישור הינה **במצב כללי** אם אף שניים אינם מקבילים, ואף שלושה לא עוברים דרך אותה הנקודה. קבוצה של ישרים במצב כללי מחלקת את המישור לאזורים; האזורים ששטחם סופי יכונו **האזורים הסופיים** של קבוצת הישרים. הוכח כי לכל n גדול מספיק, בכל קבוצה של n ישרים במצב כללי, ניתן לצבוע לפחות $\sqrt{n}$ מהישרים בכחול כך שלאף אזור סופי אין שפה שכולה כחולה.

הערה: תוצאות בהן $\sqrt{n}$ מוחלף ב-$c\sqrt{n}$ תנוקדנה בהתאם לערך של הקבוע c.

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות