

יום שישי, 10 ביולי, 2015

שאלה 1. קבוצה סופית S של נקודות במישור נקראת **מאוזנת** אם לכל שתי נקודות שונות A ו- B ב- S קיימת נקודה C ב- S כך שמתקיים $AC = BC$. נקראת **נטולת-מרכזים** אם לכל שלוש נקודות שונות A, B ו- C ב- S , לא קיימת אף נקודה P ב- S כך שמתקיים $PA = PB = PC$.

(א) הוכיחו כי לכל מספר שלם $n \geq 3$, קיימת קבוצה מאוזנת המורכבת מ- n נקודות בדיוק.
(ב) מצאו את כל המספרים השלמים $n \geq 3$ עבורם קיימת קבוצה מאוזנת ונטולת-מרכזים המורכבת מ- n נקודות בדיוק.

שאלה 2. מצאו את כל השלשות (a, b, c) של מספרים שלמים חיוביים כך שכל המספרים $ab - c, bc - a, ca - b$

הם חזקות של 2.

(מספר נקרא חזקה של 2 אם הוא מהצורה 2^n , כאשר n הינו שלם אי-שלילי.)

שאלה 3. יהא ABC משולש חד-זוויות בו מתקיים $AB > AC$. יהיו Γ המעגל החוסם שלו, H מפגש הגבהים שלו, F ו- E עקב הגובה מ- A . נסמן ב- M את אמצע הצלע BC . תהא Q הנקודה על Γ המקיימת $\angle HQA = 90^\circ$, ותהא K הנקודה על Γ המקיימת $\angle HKQ = 90^\circ$. נניח כי הנקודות A, B, C, K, Q שונות זו מזו, ומופיעות ב- Γ בסדר זה. הוכיחו כי המעגלים החוסמים של המשולשים KQH ו- FKM משיקים זה לזה.

יום שבת, 11 ביולי, 2015

שאלה 4. נסמן את המעגל החוסם של המשולש ABC ב- Ω , ואת מרכז המעגל ב- O . מעגל Γ עם מרכז ב- A חותך את הקטע BC בנקודות D ו- E כך שהנקודות B, D, E, C כולן שונות זו מזו ומופיעות על הישר BC בסדר זה. תהיינה F ו- G נקודות החיתוך של Γ ו- Ω כך שהנקודות A, F, B, C, G מופיעות על Ω בסדר זה. תהא K נקודת החיתוך השנייה של המעגל החוסם של המשולש BDF ושל הקטע AB . תהא L נקודת החיתוך השנייה של המעגל החוסם של המשולש CGE ושל הקטע CA .

נניח כי הישרים FK ו- GL שונים זה מזה ונחתכים בנקודה X . הוכיחו כי X נמצאת על הישר AO .

שאלה 5. נסמן ב- $\mathbb{R}$ את קבוצת המספרים הממשיים. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות את המשוואה $f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$ לכל זוג מספרים ממשיים x ו- y .

שאלה 6. סדרת המספרים השלמים $a_1, a_2, \dots$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

$$1 \leq a_j \leq 2015 \quad \text{לכל } j \geq 1 \quad (i)$$

$$1 \leq k < l \quad k + a_k \neq l + a_l \quad (ii)$$

הוכיחו כי קיימים שני שלמים חיוביים b ו- N כך שמתקיים

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

לכל זוג מספרים שלמים m ו- n המקיימים $n > m \geq N$.