



2015年7月10日, 星期五

第1题. 我们称平面上一个有限点集 S 是平衡的, 如果对 S 中任意两个不同的点 A, B , 都存在 S 中一点 C , 满足 $AC = BC$. 我们称 S 是无中心的, 如果对 S 中任意三个不同的点 A, B, C , 都不存在 S 中一点 P , 满足 $PA = PB = PC$.

- (a) 证明: 对每个整数 $n \geq 3$, 均存在一个由 n 个点构成的平衡点集.
(b) 确定所有的整数 $n \geq 3$, 使得存在一个由 n 个点构成的平衡且无中心的点集.

第2题. 确定所有三元正整数组 (a, b, c) , 使得

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

中的每个数都是2的方幂.

(2的方幂是指形如 2^n 的整数, 其中 n 是一个非负整数.)

第3题. 在锐角三角形 ABC 中, $AB > AC$. 设 Γ 是它的外接圆, H 是它的垂心, F 是由顶点 A 处所引高的垂足. M 是边 BC 的中点. Q 是 Γ 上一点, 使得 $\angle HQA = 90^\circ$, K 是 Γ 上一点, 使得 $\angle HKQ = 90^\circ$. 已知点 A, B, C, K, Q 互不相同, 且按此顺序排列在 Γ 上.

证明: 三角形 KQH 的外接圆和三角形 FKM 的外接圆相切.



2015年7月11日, 星期六

第4题. 在三角形 ABC 中, Ω 是其外接圆, O 是其外心. 以 A 为圆心的一个圆 Γ 与线段 BC 交于两点 D 和 E , 使得点 B, D, E, C 互不相同, 并且按此顺序排列在直线 BC 上. 设 F 和 G 是 Γ 和 Ω 的两个交点, 并且使得点 A, F, B, C, G 按此顺序排列在 Ω 上. 设 K 是三角形 BDF 的外接圆和线段 AB 的另一个交点. 设 L 是三角形 CGE 的外接圆和线段 CA 的另一个交点. 假设直线 FK 和 GL 不相同, 且相交于点 X . 证明: X 在直线 AO 上.

第5题. 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数的集合. 求所有的函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足对任意实数 x, y , 都有

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x).$$

第6题. 整数序列 $a_1, a_2, \dots$ 满足下列条件:

- (i) 对每个整数 $j \geq 1$, 有 $1 \leq a_j \leq 2015$;
- (ii) 对任意整数 $1 \leq k < \ell$, 有 $k + a_k \neq \ell + a_\ell$.

证明: 存在两个正整数 b 和 N , 使得

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

对所有满足 $n > m \geq N$ 的整数 m 和 n 均成立.