

יום שלישי, 16 ביולי, 2019

שאלה 1. נסמן ב- $\mathbb{Z}$ את קבוצת השלמים. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ עבורן לכל a ו- b שלמים,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

שאלה 2. במשולש ABC , הנקודה A_1 נמצאת על הצלע BC והנקודה B_1 נמצאת על הצלע AC . תהיינה P ו- Q נקודות על הקטעים AA_1 ו- BB_1 , בהתאמה, עבורן PQ מקביל ל- AB . תהא P_1 נקודה על הישר PB_1 , עבורה B_1 נמצאת בין P ל- P_1 וכן $\angle PP_1C = \angle BAC$. באופן דומה, תהא Q_1 נקודה על הישר QA_1 , עבורה A_1 נמצאת בין Q ל- Q_1 וכן $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. הוכיחו כי הנקודות P, Q, P_1, Q_1 נמצאות על מעגל אחד.

שאלה 3. ברשת חברתית יש 2019 משתמשים, וחלק מזוגות המשתמשים הם חברים זה של זה. החברות היא תמיד הדדית. מאורעות מהסוג הבא יכולים לקרות מספר פעמים, בזה אחר זה:

שלושה משתמשים A, B ו- C עבורם A חבר גם של B וגם של C , אך B ו- C אינם חברים זה של זה, מחליפים את יחסי החברות שלהם כך שכעת B ו- C הם חברים זה של זה, אך A אינו חבר של B ואינו חבר של C . כל שאר יחסי החברות נשארים ללא שינוי.

בהתחלה, ל-1010 משתמשים יש 1009 חברים כל אחד, ול-1009 משתמשים יש 1010 חברים כל אחד. הוכיחו כי קיימת סדרת מאורעות מהסוג המתואר כך שבסופה לכל משתמש יש חבר אחד לכל היותר.

יום רביעי, 17 ביולי, 2019

שאלה 4. מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים חיוביים (k, n) עבורם מתקיים

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}) = k!$$

שאלה 5. בנק באת' מנפיק מטבעות עליהם מוטבע H בצד אחד ו- T בצד השני. להארי יש n מטבעות כאלו המסודרים בשורה משמאל לימין. הוא מבצע את הפעולה הבאה שוב ושוב: אם יש בדיוק $k > 0$ מטבעות עם H כלפי מעלה, הוא הופך את המטבע ה- k משמאל; אחרת, בכל המטבעות יש T כלפי מעלה והוא עוצר. לדוגמה, אם $n = 3$, התהליך שמתחיל בקונפיגורציה THT יהיה $THT \leftarrow HHT \leftarrow HTT \leftarrow TTT$, אשר נעצר אחרי שלוש פעולות.

(א) הוכיחו כי לכל קונפיגורציה התחלתית, הארי יעצור אחרי מספר סופי של פעולות.

(ב) לכל קונפיגורציה התחלתית C , נסמן ב- $L(C)$ את מספר הפעולות המבוצעות לפני שהארי עוצר. לדוגמה, $L(THT) = 3$ ו- $L(TTT) = 0$. מצאו את הערך הממוצע של $L(C)$ על פני כל 2^n הקונפיגורציות ההתחלתיות האפשריות C .

שאלה 6. יהא I מרכז המעגל החסום במשולש חד-זוויות ABC בו $AB \neq AC$. המעגל ω החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC , CA ו- AB בנקודות D , E ו- F , בהתאמה. האנך מ- D ל- EF פוגש את ω שנית בנקודה R . הישר AR פוגש את ω שנית בנקודה P . המעגלים החוסמים של המשולשים PCE ו- PBF נפגשים שנית ב- Q .

הוכיחו כי הישרים DI ו- PQ נפגשים על הישר דרך A המאונך ל- AI .