



2019年7月16日, 星期二

第1题. 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数构成的集合. 求所有函数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, 满足对任意整数 a 和 b , 都有

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

第2题. 在三角形 ABC 中, 点 A_1 在边 BC 上, 点 B_1 在边 AC 上. 点 P 和 Q 分别在线段 AA_1 和 BB_1 上, 且满足 PQ 平行于 AB . 在直线 PB_1 上取点 P_1 , 使得点 B_1 严格位于点 P 与点 P_1 之间, 并且 $\angle PP_1C = \angle BAC$. 类似地, 在直线 QA_1 上取点 Q_1 , 使得点 A_1 严格位于点 Q 与点 Q_1 之间, 并且 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

证明: 点 P, Q, P_1, Q_1 共圆.

第3题. 一个社交网络上有2019个用户, 某些用户之间是朋友关系. 只要用户 A 是用户 B 的朋友, 则用户 B 也是用户 A 的朋友. 如下形式的操作可反复进行, 每一时刻只进行一个操作:

三个用户 A, B 和 C , 满足 A 与 B, C 都是朋友, 但 B 和 C 不是朋友, 则同时改变他们之间的朋友关系, 即 B 和 C 变为朋友, 但 A 与 B 不再是朋友, A 与 C 也不再是朋友. 所有其他的朋友关系不改变.

已知最初时有1010个用户每人拥有1009个朋友, 有1009个用户每人拥有1010个朋友. 证明: 存在一个操作序列, 使得操作结束后, 每个用户至多只有一个朋友.

2019年7月17日, 星期三

第4题. 求所有正整数对 (k, n) , 满足

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

第5题. 巴斯银行发行的硬币在一面上铸有 H , 在另一面上铸有 T . 哈利有 n 枚这样的硬币并将这些硬币从左至右排成一行. 他反复地进行如下操作: 如果恰有 k (> 0) 枚硬币 H 面朝上, 则他将从左至右的第 k 枚硬币翻转; 如果所有硬币都是 T 面朝上, 则停止操作. 例如: 当 $n = 3$, 并且初始状态是 THT , 则操作过程为 $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, 总共进行了三次操作后停止.

(a) 证明: 对每个初始状态, 哈利总在有限次操作后停止.

(b) 对每个初始状态 C , 记 $L(C)$ 为哈利从初始状态 C 开始至停止操作时的操作次数, 例如 $L(THT) = 3$, $L(TTT) = 0$. 求 C 取遍所有 2^n 个可能的初始状态时得到的 $L(C)$ 的平均值.

第6题. 在锐角三角形 ABC 中, I 是内心, $AB \neq AC$. 三角形 ABC 的内切圆 ω 与边 BC , CA 和 AB 分别相切于点 D , E 和 F . 过点 D 且垂直于 EF 的直线与 ω 的另一交点为 R . 直线 AR 与 ω 的另一交点为 P . 三角形 PCE 和三角形 PBF 的外接圆交于另一点 Q .

证明: 直线 DI 和 PQ 的交点在过点 A 且垂直于 AI 的直线上.