יום שני, 11 ביולי 2022

שאלה 1. בנק אוסלו מנפיק מטבעות משני סוגים: אבץ (שיסומן ב-A) וברזל (שיסומן ב-B). למינקובסקי יש n מטבעות אבץ ו-n מטבעות ברזל, מסודרים בשורה בסדר התחלתי כלשהו. **שרשרת** הינה רצף כלשהו של מטבעות מאותו סוג. בהינתן שלם חיובי קבוע $k \leqslant 2n$, מינקובסקי מבצע שוב ושוב את הפעולה הבאה: הוא מאתר את השרשרת הארוכה ביותר אשר מכילה את המטבע ה-k משמאל, ומעביר את כל המטבעות בשרשרת זו לקצה השמאלי של השורה. לדוגמה, עבור $n = 4$ ו-$k = 4$, התהליך שמתחיל בסידור $AABBBABA$ הינו

$$.AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots$$

מצאו את כל הזוגות (n, k) עם $1 \leqslant k \leqslant 2n$ המקיימים שלכל סידור התחלתי של מטבעות, ברגע כלשהו בתהליך, כל n המטבעות השמאליים ביותר יהיו מאותו סוג.

שאלה 2. נסמן ב- $\mathbb{R}^+$ את קבוצת הממשיים החיוביים. מצאו את כל הפונקציות $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^+$ קיים ויחיד $y \in \mathbb{R}^+$ המקיים

$$.xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

שאלה 3. יהא k שלם חיובי ותהא S קבוצה סופית של מספרים ראשוניים אי-זוגיים. הוכיחו כי ישנה לכל היותר דרך אחת (עד כדי סיבובים ושיקופים) לסדר את איברי S במעגל, כך שהמכפלה של כל זוג מספרים שכנים היא מהצורה $x^2 + x + k$ עבור x שלם חיובי כלשהו.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות

כל שאלה שווה 7 נקודות

יום שלישי, 12 ביולי 2022

שאלה 4. יהא $ABCDE$ מחומש קמור בו $BC = DE$. נתון שקיימת נקודה T בתוך $ABCDE$ עבורה $TB = TD$, $TC = TE$ וכן $\angle ABT = \angle TEA$. נסמן ב-P וב-Q את נקודות החיתוך של הישר AB עם הישרים CD ו-CT, בהתאמה. נתון כי הנקודות P, B, A, Q מופיעת על ישרן המשותף בסדר הזה. נסמן ב-R וב-S את נקודות החיתוך של הישר AE עם הישרים CD ו-DT, בהתאמה. נתון כי הנקודות R, E, A, S מופיעת על ישרן המשותף בסדר הזה. הוכיחו כי הנקודות P, S, Q, R נמצאות על מעגל אחד.

שאלה 5. מצאו את כל השלשות (a, b, p) של שלמים חיוביים עבורם p ראשוני ומתקיים

$$a^p = b! + p.$$

שאלה 6. יהא n שלם חיובי. **ריבוע נורדי** הוא לוח משבצות בגודל $n \times n$ אשר מכיל את כל השלמים מ-1 עד n^2, כך שכל משבצת מכילה מספר אחד בדיוק. נאמר ששתי משבצות הן סמוכות אם הן חולקות צלע משותפת. כל משבצת אשר סמוכה רק למשבצות המכילות מספרים גדולים יותר תקרא **עמק**. **מסלול עולה** הינו סדרה של משבצת אחת או יותר המקיימת:

(i) המשבצת הראשונה בסדרה הינה עמק,

(ii) כל משבצת בסדרה, מלבד הראשונה, סמוכה למשבצת הקודמת לה,

(iii) המספרים שנמצאים במשבצות הסדרה מופיעים בסדר עולה.

מצאו את המספר הקטן ביותר האפשרי של מסלולים עולים בריבוע נורדי, כפונקציה של n.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות