星期一，*11.* 七月 *2022*

第 1 题. 奥斯陆银行发行两种硬币：铝币（记做 A）以及铜币（记做 B）。玛丽有 n 个铝币和 n 个铜币，他任意地将这些硬币排成一列。我们称相同材料的连续一小段硬币为「同花段」。给定一正整数 $k \leqslant 2n$，玛丽重复下列的操作：找出包含从左数第 k 个硬币的最长同花段，然后把这个同花段中的所有硬币移到整列硬币的最左边。举例来说，当 $n = 4$ 且 $k = 4$ 时，从 $AABBBABA$ 这个起始状态开始操作，过程会是

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

找出符合 $1 \leqslant k \leqslant 2n$ 的所有数对 (n, k)，使得不管是什么起始状态，在操作过程的某个时刻，最左边的 n 个硬币都是同一种材料的。

第 2 题. 令 $\mathbb{R}^+$ 代表所有正实数所形成的集。找出所有函数 $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^+$，都恰好有一个 $y \in \mathbb{R}^+$ 符合

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

第 3 题. 令 k 为一正整数，且 S 是一个由有限多个奇素数所形成的集。证明至多只有一种方式可以将 S 中所有数字排成一个圆圈（旋转与反射视为同一种），使得任意两个相邻数字的乘积皆可以被表示成 $x^2 + x + k$ 的形式，其中 x 为某个正整数。

星期二, 12. 七月 2022

第 4 题. 令 $ABCDE$ 为一凸五边形满足 $BC = DE$，假设在 $ABCDE$ 内部存在一点 T 使得 $TB = TD$, $TC = TE$ 且 $\angle ABT = \angle TEA$。令直线 AB 分别与直线 CD 和 CT 交于点 P 和 Q，假设 P, B, A, Q 在同一直线上按照此顺序排列。令直线 AE 分别与直线 CD 和 DT 交于点 R 和 S，假设 R, E, A, S 在同一直线上按照此顺序排列。证明 P, S, Q, R 落在同一个圆上。

第 5 题. 找出所有三元正整数组 (a, b, p)，满足 p 是素数且

$$a^p = b! + p.$$

第 6 题. 令 n 为一正整数。一个「北欧方阵」是一个包含 1 至 n^2 所有整数的 $n \times n$ 方格表，使得每个方格内恰有一个数字。两个相异方格是相邻的如果他们有公共边。一个方格被称为「山谷」，若其内的数字比所有相邻方格内的数字都小。一条「上坡路径」是一个包含一或多个方格的序列，满足：

(i) 序列的第一个方格是山谷，

(ii) 序列中随后的每个方格都和其前一个方格相邻，且

(iii) 序列中方格内所写的数字递增。

试求一个北欧方阵中上坡路径数量的最小可能值，以 n 的函数表示之。