2024 年 7 月 16 日, 星期二

第 1 题. 求所有实数 α 满足: 对任意正整数 n, 整数

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

均为 n 的倍数. (注: $\lfloor z \rfloor$ 表示小于等于 z 的最大整数. 例如, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

第 2 题. 求所有正整数对 (a, b) 满足: 存在正整数 g 和 N 使得

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

对所有整数 $n \geqslant N$ 均成立. (注: $\gcd(x, y)$ 表示整数 x 与 y 的最大公约数.)

第 3 题. 设 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 是一个无穷项的正整数序列, 且 N 是一个正整数. 已知对任意整数 $n > N$, a_n 等于整数 a_{n-1} 在 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 中出现的次数.

证明: 序列 $a_1, a_3, a_5, \ldots$ 与序列 $a_2, a_4, a_6, \ldots$ 两者至少有一个是最终周期的.

(一个无穷项的序列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ 称为最终周期的, 如果存在正整数 p 和 M 使得 $b_{m+p} = b_m$ 对所有整数 $m \geqslant M$ 均成立.)

2024 年 7 月 17 日，星期三

第 4 题. 在三角形 ABC 中 $AB < AC < BC$. 设三角形 ABC 的内心为 I, 内切圆为 ω. 点 X (X 异于 C) 在直线 BC 上, 满足过 X 且平行于 AC 的直线与圆 ω 相切. 点 Y (Y 异于 B) 在直线 BC 上, 满足过 Y 且平行于 AB 的直线与圆 ω 相切. 设直线 AI 与三角形 ABC 的外接圆交于另一点 P (P 异于 A). 设 K 和 L 分别为线段 AC 和 AB 的中点.

证明: $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

第 5 题. 憨豆特工在一个 2024 行 2023 列的方格表上做游戏. 方格表中恰有 2022 个方格各藏有一个坏人. 初始时, 憨豆不知道坏人的位置, 但是他知道除了第一行和最后一行之外, 每行恰有一个坏人, 且每列至多有一个坏人.

憨豆想从第一行移动到最后一行, 并进行若干轮尝试. 在每一轮尝试中, 憨豆可以在第一行中任意选取一个方格出发并不断移动, 他每次可以移动到与当前所在方格有公共边的方格内. (他允许移动到之前已经到达过的方格.) 若憨豆移动到一个有坏人的方格, 则此轮尝试结束, 并且他被传送回第一行开始新的一轮尝试. 坏人在整个游戏过程中不移动, 并且憨豆可以记住每个他经过的方格内是否有坏人. 若憨豆到达最后一行的任意一个方格, 则游戏结束.

求最小的正整数 n, 使得不论坏人的位置如何分布, 憨豆总有策略可以确保他能够经过不超过 n 轮尝试到达最后一行.

第 6 题. 记 $\mathbb{Q}$ 是所有有理数的集合. 一个函数 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 称为神奇函数, 如果对任意 $x, y \in \mathbb{Q}$ 均有: 下述两个等式

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{与} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

至少有一个成立.

证明: 存在整数 c 满足对任意一个神奇函数 f, 至多存在 c 个两两不同的有理数可以表示为 $f(r) + f(-r)$ 的形式 ($r \in \mathbb{Q}$). 并求满足上述要求的最小整数 c.