



2024 年 7 月 16 日, 星期二

第 1 题. 求所有实数  $\alpha$  满足: 对任意正整数  $n$ , 整数

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

均为  $n$  的倍数. (注:  $\lfloor z \rfloor$  表示小于等于  $z$  的最大整数. 例如,  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ,  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ .)

第 2 题. 求所有正整数对  $(a, b)$  满足: 存在正整数  $g$  和  $N$  使得

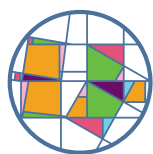
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

对所有整数  $n \geq N$  均成立. (注:  $\gcd(x, y)$  表示整数  $x$  与  $y$  的最大公约数.)

第 3 题. 设  $a_1, a_2, a_3, \dots$  是一个无穷项的正整数序列, 且  $N$  是一个正整数. 已知对任意整数  $n > N$ ,  $a_n$  等于整数  $a_{n-1}$  在  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  中出现的次数.

证明: 序列  $a_1, a_3, a_5, \dots$  与序列  $a_2, a_4, a_6, \dots$  两者至少有一个是最终周期的.

(一个无穷项的序列  $b_1, b_2, b_3, \dots$  称为最终周期的, 如果存在正整数  $p$  和  $M$  使得  $b_{m+p} = b_m$  对所有整数  $m \geq M$  均成立.)



2024 年 7 月 17 日, 星期三

**第 4 题.** 在三角形  $ABC$  中  $AB < AC < BC$ . 设三角形  $ABC$  的内心为  $I$ , 内切圆为  $\omega$ . 点  $X$  ( $X$  异于  $C$ ) 在直线  $BC$  上, 满足过  $X$  且平行于  $AC$  的直线与圆  $\omega$  相切. 点  $Y$  ( $Y$  异于  $B$ ) 在直线  $BC$  上, 满足过  $Y$  且平行于  $AB$  的直线与圆  $\omega$  相切. 设直线  $AI$  与三角形  $ABC$  的外接圆交于另一点  $P$  ( $P$  异于  $A$ ). 设  $K$  和  $L$  分别为线段  $AC$  和  $AB$  的中点.

证明:  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**第 5 题.** 憨豆特工在一个 2024 行 2023 列的方格表上做游戏. 方格表中恰有 2022 个方格各藏有一个坏人. 初始时, 憨豆不知道坏人的位置, 但是他知道除了第一行和最后一行之外, 每行恰有一个坏人, 且每列至多有一个坏人.

憨豆想从第一行移动到最后一行, 并进行若干轮尝试. 在每一轮尝试中, 憨豆可以在第一行中任意选取一个方格出发并不断移动, 他每次可以移动到与当前所在方格有公共边的方格内. (他允许移动到之前已经到达过的方格.) 若憨豆移动到一个有坏人的方格, 则此轮尝试结束, 并且他被传送回第一行开始新一轮尝试. 坏人在整个游戏过程中不移动, 并且憨豆可以记住每个他经过的方格内是否有坏人. 若憨豆到达最后一行的任意一个方格, 则游戏结束.

求最小的正整数  $n$ , 使得不论坏人的位置如何分布, 憨豆总有策略可以确保他能够经过不超过  $n$  轮尝试到达最后一行.

**第 6 题.** 记  $\mathbb{Q}$  是所有有理数的集合. 一个函数  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  称为神奇函数, 如果对任意  $x, y \in \mathbb{Q}$  均有: 下述两个等式

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{与} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

至少有一个成立.

证明: 存在整数  $c$  满足对任意一个神奇函数  $f$ , 至多存在  $c$  个两两不同的有理数可以表示为  $f(r) + f(-r)$  的形式 ( $r \in \mathbb{Q}$ ). 并求满足上述要求的最小整数  $c$ .